PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR KOMPLEKS MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI *QR*

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

IIS ERIANTI
10854004501

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2013

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR KOMPLEKS MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI *QR*

IIS ERIANTI
10854004501

Tanggal Sidang : 01 Juli 2013
Tanggal Wisuda : 2013

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Sistem persamaan linear kompleks adalah sistem persamaan linear yang berbentuk bilangan riil dan imajiner, yang di simbolkan dengan bentuk $x + iy$, dimana x adalah bilangan riil dan y adalah bilangan imajiner. Proses penyelesaian sistem persamaan linear kompleks terlebih dahulu akan ditentukan matriks kompleks yang berukuran 6×6 dan selanjutnya akan dipisahkan antara bilangan real dan kompleks, dan akan menghasilkan matriks yang berukuran 12×12. Untuk matriks kompleks yang berukuran 7×7 akan menghasilkan matriks yang berukuran 14×14. Kemudian ditentukan solusi penyelesaian dari sistem persamaan linear kompleks. Sistem persamaan linear kompleks dapat diselesaikan dengan menggunakan metode dekomposisi *QR*. Metode dekomposisi *QR* merupakan suatu metode yang mendekomposisikan suatu matriks *A* menjadi matriks *Q* dan *R*, dengan *Q* adalah matriks yang vektor kolomnya ortonormal dan *R* adalah matriks segitiga atas.

Katakunci: basis ortogonal, basis ortonormal, *dekomposisi QR*, sistem persamaan linear kompleks.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, segala puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Kompleks Menggunakan Metode Dekomposisi *QR*"**. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at dan dalam lindungan Allah SWT amin.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayahanda dan ibunda yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, do'a, dan dukungan untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Pada kesempatan ini pula, penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku pembimbing tugas akhir yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.

6. Bapak Wartono, M.Sc selaku penguji II yang telah banyak membantu, mendukung dan memberikan saran dalam penulisan tugas akhir ini.
7. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru, Juli 2013

Iis Erianti

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem persamaan linear merupakan sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari koefisien dan variabel. Koefisien pada persamaan linear ada yang berbentuk bilangan real, ada yang berbentuk bilangan interval, ada yang berbentuk bilangan *fuzzy* dan ada juga yang berbentuk bilangan kompleks. Kajian dalam tugas akhir ini adalah sistem persamaan linear kompleks.

Penelitian masalah sistem persaman linear telah banyak dilakukan oleh para matematikawan. Banyak metode yang dikembangkan untuk menentukan solusi dari sistem persaman linear. Sistem persamaan linear pada dasarnya memiliki tujuan yang sama yaitu mencari solusi yang memenuhi dari sistem persamaan linear tersebut.

Penyelesaian masalah sistem persaman linear dapat di lakukan dengan cara *Operasi Baris Elementer* (OBE), Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, aturan *Cramer* dan metode dekomposisi. Beberapa jenis dekomposisi matriks lainnya adalah seperti; Dekomposisi Nilai Singular, Dekomposisi Schur, Dekomposisi Dolete, Dekomposisi Cholesky, Dekomposisi LU, Dekomposisi *QR*. Dalam tugas akhir ini menggunakan metode dekomposisi *QR*.

Metode Dekomposisi *QR* adalah suatu metode yang membagi suatu matriks A menjadi suatu hasil perkalian matriks Q dan R, dengan Q merupakan matriks dengan vektor kolom yang ortonormal dan R merupakan matriks segitiga atas yang dapat di balik. Maka A dapat difaktorkan sebagai $A = QR$.

Metode dekomposisi *QR* telah banyak digunakan oleh peneliti-peneliti sebelumnya pada skripsi Sugeng Widodo yang berjudul *"Kajian Dekomposisi Matriks"* pada tahun 2003. Sugeng Widodo dalam penelitiannya memaparkan bahwa terdapat hubungan antara Dekomposisi Nilai Singular dan Dekomposisi *QR* yaitu nilai singular A pada Dekomposisi Nilai Singular adalah nilai singular R pada Dekomposisi *QR* dari A. Tesis Purbandini dengan judul *"Sistem Pengenalan*

Wajah pada Subruang Orthogonal Dengan Menggunakan Laplacianface Terdekomposisi QR, tahun 2006. Penelitian oleh Purbandini memberikan hasil bahwa dengan mengkombinasikan Algoritma LPP dan *QR* akan dihasilkan keakuratan hasil dan biaya komputasi yang murah dalam pengklasifikasian pengenalan wajah.

Penyelesaian sistem persamaan linear kompleks sudah dibahas sebelumnya pada buku Nicholson, W. Keith *"Elementery Algebra"*. First Edition. McGraw-Hill, Singapore.2001. Selanjutnya Skripsi Dewi Yulianti yang berjudul "*Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Kompleks menggunakan Metode Dekomposisi SVD"* pada tahun 2012. Berdasarkan uraian tersebut, maka penulis tertarik untuk menggunakan dekomposisi *QR* dalam menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks. Sehingga pada Tugas Akhir ini penulis melakukan penelitian dengan judul **"Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Kompleks Menggunakan Metode Dekomposisi *QR*".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan diatas, rumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah, "Bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks menggunakan metode dekomposisi *QR* ?".

1.3 Batasan Masalah

Agar tujuan dari penelitian ini dapat dicapai dengan baik dan tepat, maka diperlukan adanya pembatasan masalah, diantaranya:

1. Sistem persaman linear kompleks yang diteliti adalah sistem persamaan linear dengan 6 persamaan untuk 6 variabel, dan 7 persamaan untuk 7 variabel.
2. Koefisien pada sistem persamaan linear berbentuk $x + iy$ dengan $x \neq 0$, $y \neq 0$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah memperoleh penyelesaian dari sistem persamaan linear kompleks dengan 6 persamaan untuk 6 variabel dan 7 persamaan untuk 7 variabel dengan menggunakan metode dekomposisi *QR*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk memperdalam pemahaman penulis mengenai materi tentang sistem persamaan linear kompleks, dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajarr untuk mengkaji suatu permasalahan aljabar linear khususnya dalam hal menyelesaikan system persamaan linear kompleks dengan menggunakan metode dekomposisi *QR*.
2. Memberikan informasi kepada pembaca bahwa dekomposisi *QR* dapat juga digunakan untuk menyelesaikan system persamaan linear kompleks.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Bab ini bersisi latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang sistem persamaan linear, bilangan kompleks, bilangan konjugat kompleks, matriks kompleks, ruang hasil kali dalam, basis orthogonal dan basis ortonormal, *Gram Schmit*, dan Dekomposisi *QR*

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan langkah-langkah atau prosedur dalam menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks dengan menggunakan metode dekomposisi *QR*.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan penjelasan bagaimana metode dekomposisi *QR* dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear kompleks.

BAB V Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisikan kesimpulan dari hasil dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab IV dan saran dari penulis.

BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini berisikan penjelasan mengenai teori pendukung yang akan digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks dengan menggunakan metode dekomposisi *QR*.

2.1 Sistem Persamaan Linear

Definisi 2.1 (Schaum's, 2006): Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari m persamaan linear $L_1, L_2, \dots, L_m$, dengan n variabel yang tidak diketahui $x_1, x_2, \dots, x_n$, dapat disusun dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2.1}$$

dengan a_{ij} adalah koefisien dari variabel yang tidak diketahui x_j pada persamaan l_i, dan bilangan b_i adalah konstanta dari persamaan l_i.

Sistem persamaan linear pada persamaan (2.1) yang terdiri dari m persamaan linear dengan n variabel ekuivalen dengan persamaan matriks $AX = B$, yaitu :

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \tag{2.2}$$

dengan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks koefisien, $X = [x_j]$ adalah vektor kolom dari variabel-variabel yang tidak diketahui, dan $B = [b_i]$ adalah vektor kolom dari konstanta.

Sistem persamaan linear pada persamaan (2.1) disebut sebagai sistem persamaan linear $m \times n$. Sistem ini disebut sistem bujur sangkar jika $m = n$, yaitu jika banyaknya persamaan m sama banyaknya variabel yang tidak diketahui n.

Sistem persamaan linear pada persamaan (2.1) disebut sebagai sistem persamaan linear homogen jika semua koefisien konstantanya adalah nol, yaitu jika $b_1 = 0, b_2 = 0, \dots, b_m = 0$. Jika tidak maka sistem persamaan linear itu disebut sebagai sistem persamaan linear non homogen.

Beberapa bentuk pemecahan atau solusi dari sistem persamaan linear adalah sebagai berikut:

1) Memiliki satu solusi.

   Dikatakan memiliki satu solusi apabila garis-garis persamaan berpotongan di satu titik. Ini terjadi jika garis-garis memiliki kemiringan yang berbeda.

2) Tidak memiliki solusi.

   Dikatakan tidak memiliki solusi apabila garis-garis persamaan saling sejajar. Ini terjadi jika garis-garis memiliki kemiringan yang berbeda.

3) Memiliki banyak solusi.

   Dikatan memiliki banyak solusi apabila garis-garis persamaan berhimpitan. Ini terjadi jika garis-garis memiliki kemiringan yang sama.

Selanjutnya, akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linear real sebagai berikut :

Contoh 2.1 :

Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan operasi baris elementer (OBE).

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ -3 & 4 & 6 & 30 \\ -1 & -2 & 3 & 8 \end{matrix} \quad b_2 + 3b_1$$

Baris kedua ditambah 3 kali baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 12 & 48 \\ -1 & -2 & 3 & 8 \end{bmatrix} b_3 + b_1$$

Baris ketiga ditambah baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 12 & 48 \\ 0 & -2 & 5 & 14 \end{bmatrix} b_2 \times \frac{1}{4}$$

Baris kedua dikali $\frac{1}{4}$ baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & -2 & 5 & 14 \end{bmatrix} b_3 + 2b_2$$

Baris ketiga ditambah 2 kali baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 11 & 38 \end{bmatrix} b_3 \times \frac{1}{11}$$

Baris ketiga dikali $\frac{1}{11}$baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{38}{11} \end{bmatrix} b_1 - 2b_3$$

Baris pertama dikurang 2 kali baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{11} \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{38}{11} \end{bmatrix} b_2 - 3b_3$$

Baris kedua dikurang 3 kali baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{38}{11} \end{bmatrix}$$

Jadi, solusi dari sistem persamaan linear di atas adalah solusi tunggal dengan $x_1 = -\frac{10}{11}$, $x_2 = \frac{18}{11}$, dan $x_3 = \frac{38}{11}$.

2.2 Sistem Persamaan Linear Kompleks

Sebelum membahas mengenai sistem persamaan linear kompleks, akan dijelaskan terlebih dahulu pengertian bilangan kompleks. Bilangan kompleks adalah bilangan yang terdiri dari bilangan real dan imajiner. Berikut akan diberikan definisi dari bilangan kompleks.

Definisi 2.2 (Hasugian, M. 2006): Bilangan kompleks z adalah pasangan terurut dari bilangan nyata x dan y, ditulis sebagai berikut :

$$z = (x, y) = x + iy. \qquad (2.3)$$

notasi i disebut sebagai satuan imajiner, $i = \sqrt{-1}$, maka $i^2 = -1$, dengan x disebut sebagai bagian nyata (*real*) dari z dan y disebut sebagai bagian imajiner dari z,

$$x = \text{Re}(z), \ y = \text{Im}(z) \qquad (2.4)$$

Jika suatu bilangan kompleks $z = x + iy$, maka konjugat dari z adalah $\bar{z} = x - iy$, selanjutnya, maka berlaku sifat sebagai $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definisi 2.3 (Lipschutz, S. 2006): Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Matriks kompleks yaitu matriks dengan entri-entri bilangan kompleks. Misalkan A adalah matriks kompleks, jika $z = x + iy$ adalah bilangan kompleks, maka $\bar{z} = x - iy$ adalah konjugatnya. Konjugat dari matriks kompleks A, yang ditulis $\bar{A}$, adalah matriks yang diperoleh dari A dengan cara menghitung konjugat dari setiap entri A.

Operasi transpose dan operasi konjugasi bersifat komutatif untuk sebarang matriks *A*, dan notasi A^H digunakan untuk transpose konjugat A, yaitu :

$$A^H = (\bar{A})^T$$

Selanjutnya, akan diberikan contoh matriks kompleks sebagai berikut :

Contoh 2.2 :

Carilah transpos konjugat dari matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 3+4i & 1 \\ i & 2+3i \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

a. Mencari konjugat dari matriks A

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 3-4i & 1 \\ -i & 2-3i \end{bmatrix}$$

b. Mencari transpos konjugat dari matriks A

$$A^H = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 3-4i & -i \\ 1 & 2-3i \end{bmatrix}.$$

Hubungan antara matriks kompleks A dan transpos konjugatnya A^H akan menghasilkan beberapa jenis matriks kompleks, salah satu diantaranya adalah matriks Uniter. Matriks uniter merupakan matriks kompleks yang baris-baris dan kolom-kolomnya membentuk suatu himpunan ortonormal yang relatif terhadap hasil kali titik dari vektor-vektor kompleks.

Definisi 2.4 (Anton, H. 2004): Sebuah matriks A dengan entri-entri bilangan kompleks disebut uniter jika:

$$A^H = A^{-1} \tag{2.5}$$

dengan catatan A haruslah bujur sangkar dan dapat dibalik.

Contoh 2.3 :

Tunjukkan bahwa $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i \end{bmatrix}$ adalah matriks uniter.

Penyelesaian :

a. Mencari nilai A^H

$$A^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i \end{bmatrix}$$

b. Mengalikan matriks *A* dengan matriks A^H

$$AA^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

karena $AA^H = I$, maka $A^H = A^{-1}$. Jadi A merupakan matriks uniter.

Dari definisi (2.2) maka sistem persamaan linear kompleks merupakan sistem persamaan linear dengan koefisien atau konstantanya adalah bilangan kompleks. Menurut Nicholson (2001) menjelaskan bahwa sistem persaman linear kompleks dapat juga diselesaikan dengan menggunakan Operasi Baris Elementer.

Contoh 2.4 :

Selesaikan sistem persamaan linear kompleks berikut dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE).

$$x + \ 1 + i\ y - iz = 2$$
$$1 + i\ x + \quad 1 - i\ z = 3 + i$$
$$-x + \ 1 - i\ y + iz = i - 1$$

Penyelesaian:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1+i & -i & 2 \\ 1+i & 0 & 1-i & 3+i \\ -1 & 1-i & i & -1+i \end{array} \quad b_2 - (1+i)b_1$$

Baris kedua dikurang $-(1+i)$ baris pertama

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1+i & -i & 2 \\ 0 & -2i & 0 & 1-i \\ -1 & 1-i & i & -1+i \end{array} \quad b_3 + b_1$$

Baris ketiga ditambah baris pertama

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1+i & -i & 2 \\ 0 & -2i & 0 & -1-i \\ 0 & 2 & 0 & 1+i \end{array} \quad b_2 \times -\frac{1}{2}$$

Baris kedua dikali $-\frac{1}{2}$ baris kedua

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1+i & i & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 + 0{,}5i \\ 0 & 2 & 0 & 1+i \end{array} \quad b_1 - \ 1 + i\ b_2$$

Baris pertama dikurang $1 + i$ baris kedua

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 2-i \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 + 0{,}5i \\ 0 & 2 & 0 & 1+i \end{array} \quad b_3 - 2b_2$$

Baris ketiga dikurang 2 baris kedua

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -i & 2-i \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5+0{,}5i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Misalkan $x_3 = s$, maka didapat solusi banyak dari sistem persamaan linear di atas dengan $x_2 = 0{,}5 + 0{,}5i$ dan $x_1 = 2 - i + is$.

Definisi 2.5 (Rahgooy, dkk. 2009) Suatu sistem persamaan linear kompleks $n \times n$.

$$\begin{matrix} C_{11}Z_1 + C_{12}Z_2 + \cdots + C_{1n}Z_1 = W_1 \\ C_{21}Z_1 + C_{12}Z_2 + \cdots + C_{1n}Z_1 = W_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ C_{n1}Z_1 + C_{n2}Z_2 + \cdots + C_{nn}Z_n = W_n \end{matrix} \tag{2.6}$$

dengan koefisien matriks $C = (c_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ adalah matriks kompleks $n \times n$. Pada persamaan (2.6) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut :

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij} Z_j = W_i \ , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

dimana,

$$C_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}$$

$$Z_j = p_j + iq_j$$

$$W_i = u_i + iv_i$$

Sehingga penjabarannya dibentuk sebagai berikut :

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + ib_{ij})(p_j + iq_j) = u_i + iv_i \tag{2.7}$$

Sehingga solusi sistem persamaan linearnya dapat ditulis sebagai berikut :

$$U = (u_i)$$

$$V = (v_i)$$

$$D = (a_{ij})$$

$$E = (b_{ji})$$

$$P = (p_j)$$

$$S = (q_j) \quad \text{untuk } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Selanjutnya dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} D & -E \\ E & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

2.3 Dekomposisi *QR*

Dekomposisi *QR* merupakan metode yang membagi suatu matriks A menjadi suatu hasil perkalian matriks *Q* dan matriks *R*, dimana *Q* merupakan matriks ortonormal dan *R* merupakan matriks segitiga atas yang dapat dibalik.

Untuk menentukan suatu matriks ortonormal dan matriks segitiga atas, salah satunya dengan menggunakan proses Gram-Schmidt. Sebelum melakukan proses Gram-Schmidt akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai hasil kali dalam, basis orthogonal dan basis ortonormal.

Definisi 2.6 (Anton, H. 2004): Ruang hasil kali dalam (*inner product space*) pada sebuah ruang vektor riil V adalah fungsi yang mengasosiasikan sebuah bilangan rill $\langle u, v\rangle$ dengan semua vektor u, v dan w di dalam V dan k skalar dari sebuah bilangan riil, sehingga memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

i. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ untuk semua $u, v \in V$
ii. $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$ untuk semua $k \in R$ dan semua $u, v \in V$
iii. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ untuk semua $u, v, w \in V$
iv. $\langle v, v\rangle \geq 0$ dan $\langle v, v\rangle = 0$ untuk semua $v \in V$ jika dan hanya jika $v = 0$.

Jika V adalah sebuang hasil kali dalam, maka norma (norm) sebuah vektor u di dalam V di notasikan dengan $||u||$ dan didefenisikan sebagai berikut :

$$||u|| = \langle u \,.\, u\rangle^{1/2}$$

Definisi 2.8 (Anton, H. 2004): Jika V adalah suatu ruang vektor sebarang dan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subset V$, maka S disebut basis untuk V jika memenuhi kedua syarat berikut:

(i) Himpunan S bebas linear.
(ii) Himpunan S merentang pada V.

Definisi 2.9 (Anton, H. 2004): Vektor u, v di dalam sebuah ruang hasil kali dalam pada V dikatakan ortogonal jika $\langle u, v\rangle = 0$. Selanjutnya, jika $u \in V$ dikatakan basis ortonormal jika dan hanya jika $\|u\| = 1$.

Teorema 2.1 (Anton, H. 2004) Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah sebuah basis ortonormal untuk sebuah ruang hasil kali dalam V, dan u adalah sebuah vektor sebarang pada V, maka:

$$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n.$$

Bukti: karena $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah sebuah basis, dimana vektor u dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$u = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n$$

akan ditunjukan bahwa $k_i = \langle u, v_i\rangle$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Untuk setiap vektor $v_i \in S$ diperoleh:

$$\langle u, v_1\rangle = \langle k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n\rangle$$
$$= k_1\langle v_1, v_i\rangle + k_2\langle v_2, v_i\rangle + k_n\langle v_n, v_i\rangle$$

Karena $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah sebuah himpunan ortonormal, maka diperoleh:

$$\langle v_i, v_i\rangle = \|v_i\| = 1 \text{ dan } \langle v_j, v_i\rangle = 0 \text{ jika } j \neq i,$$

Oleh karena itu, maka $\langle u, v_i\rangle$ dapat disederhanakan menjadi

$$\langle u, v_i\rangle = k_i$$ ■

Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah sebuah basis ortogonal untuk sebuah ruang vektor V, maka normalisasi tiap-tiap vektor di dalam basis ini akan menghasilkan basis ortonormal yaitu dengan bentuk sebagai berikut:

$$S' = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$$

Sehingga, jika u adalah sebuah vektor sebarang di dalam V, berdasarkan Teorema 2.1 maka di peroleh:

$$u = \left\langle u, \frac{v_1}{\|v_1\|}\right\rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \left\langle u, \frac{v_2}{\|v_2\|}\right\rangle \frac{v_2}{\|v_2\|} + \dots + \left\langle u, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\rangle \frac{v_n}{\|v_n\|} \quad (2.9)$$

Berdasarkan Definisi 2.9 pada persamaan (2.9) dapat di tuliskan kembali sebagai :

$$u = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|} v_1 + \frac{\langle u, v_2\rangle}{\|v_2\|} v_2 + \dots + \frac{\langle u, v_n\rangle}{\|v_n\|} v_n \quad (2.10)$$

Pada persamaan (2.10), u menyatakan sebuah kombinasi linear dari vektor-vektor di dalam basis ortogonal S. Dan untuk menentukan basis ortogonal dan ortonormal pada ruang hasil kali dalam akan di gunakan konsep proyeksi ortogonal. Secara umum dapat di definisikan proyeksi ortogonal u pada W terhadap ruang hasil kali dalam adalah sebagai berikut :

Definisi 2.10 (Anton, H. 2004): Jika $v_1, v_2, \dots v_r$ adalah sebuah basis ortogonal untuk *W*, dan u adalah sebuah vektor sebarang pada V, maka proyeksi ortogonal u terhadap W adalah:

$$\text{Proj}_W\ u = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \cdots + \frac{\langle u, v_r\rangle}{\|v_r\|^2} v_r \qquad (2.11)$$

Proses mengubah sebarang basis ortogonal ke basis ortonormal dinamakan proses gram-schmidt. Berikut langkah-langkah proses gram-schmidt:

Langkah 1: Misalkan : $v_1 = u_1$

Langkah 2: $v_2 = u_2 - proj_{W_1} u_2$

$$= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

Jika $v_2 = 0$, maka v_2 bukan merupakan vektor basis. Dari v_2 akan di peroleh:

$$u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = 0$$

$$u_2 = \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

Langkah 3: Untuk membentuk sebuah vektor v_3 yang ortogonal terhadap v_1 maupun v_2, maka akan di tentukan komponen u_3 yang ortogonal terhadap ruang W_2 yang di rentang oleh v_1 dan v_2, yaitu:

$$v_3 = u_3 - proj_{W_2} u_3$$

$$= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

Langkah 4: Untuk menentukan sebuah vektor v_4 yang ortonormal terhadap v_1 dan v_2, dan v_3, akan di tentukan komponen u_4 yang orthogonal terhadap ruang W_3 yang direntang oleh $v_1, v_2,$ dan v_3, yaitu:

$$v_4 = u_4 - proj_{W_3} u_4$$

$$= u_4 - \frac{\langle u_4, v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_4, v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_4, v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3$$

Secara umum, proses gram-schmidt dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$v_i = u_i - \frac{\langle u_i, v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \cdots - \frac{\langle u_i, v_{i-1} \rangle}{\| v_{i-1} \|^2} v_{i-1},$$

untuk $i = 2,3,4, \dots, n$

Dari penjabaran proses gram-schmidt, sehingga dapat ditentukan solusi metode dekomposisi *QR*. Berikut adalah Teorema yang mendefinisikan dekomposisi *QR* :

Teorema 2.2 (Anton, H. 2004): Jika A adalah sebuah mariks $m\,x\,n$ yang memiliki vektor-vektor kolom yang bebas linear, maka A dapat difaktorkan sebagai

$$A = QR$$

dengan *Q* adalah sebuah matriks *m x n* yang memiliki vektor-vektor kolom ortonormal, dan *R* adalah matriks segitiga atas $n\,x\,n$ yang dapat dibalik.

Bukti :

Misalkan diketahui matriks $A \in \mathbb{R}^{mxn}$. Bahwa vektor-vektor kolom dari *A* adalah $u_1,\ u_2, \dots u_n$ dan vektor-vektor kolom ortonormal dari *Q* adalah $q_1, q_2, \dots, q_n$ sehingga,

$$A = [u_1 | u_2 | \dots u_n] \in \mathbb{R}^m \quad \text{dan} \quad Q = [q_1 | q_2 | \dots q_n] \in \mathbb{R}^n.$$

Berdasarkan Teorema 2.1 bahwa $u_1, u_2, \dots u_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk vektor-vektor $q_1, q_2, \dots q_n$ maka $u_1, u_2, \dots u_n$ dapat disajikan sebagai kombinasi linear dari basis ortonormal tersebut, yaitu:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \langle u_1, q_1\rangle q_1 + \langle u_1, q_1\rangle q_2 + \cdots + \langle u_n, q_n\rangle q_n \\
u_2 &= \langle u_2, q_1\rangle q_1 + \langle u_2, q_2\rangle q_2 + \cdots + \langle u_n, q_n\rangle q_n \\
\vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
u_n &= \langle u_n, q_1\rangle q_1 + \langle u_2, q_n\rangle q_2 + \cdots + \langle u_n, q_n\rangle q_n
\end{aligned}
$$

Vektor kolom ke-j sebuah hasil kali matriks adalah sebuah kombinasi linear dari vektor-vektor kolom pertamanya dengan koefisien-koefisien yang diturunkan dari kolom ke-j faktor keduanya. Selanjutnya hubungan ini dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$
u_1|u_2|\ldots|u_n = q_1|q_2|\ldots|q_n \begin{matrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \ldots & \langle u_4, q_1\rangle \\ \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_2\rangle & \ldots & \langle u_4, q_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle u_1, q_n\rangle & \langle u_2, q_n\rangle & \ldots & \langle u_4, q_n\rangle \end{matrix}
$$

dan dapat ditulis:

$$A = QR \tag{2.12}$$

Akan tetapi, sifat proses Gram-Schmidt menggariskan bahwa untuk $j \geq 2$, vektor q_j ortogonal terhadap $u_1, u_2, \ldots, u_{j-1}$; sehingga, semua entri yang terletak di bawah diagonal utama *R* adalah nol. Dapat ditulis sebagai berikut :

$$
R = \begin{matrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \cdots & \langle u_n, q_1\rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2\rangle & \cdots & \langle u_n, q_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \langle u_n, q_n\rangle \end{matrix} . \qquad \blacksquare
$$

Teorema 2.3 (Steven, j. 2001): Jika *A* adalah matriks yang diperoleh dari faktor *A=QR*, dimana *Q* adalah matriks kolom vektor dari basis ortonormal untuk kolom *A* dekomposisi *QR* maka sistem normal untuk $Ax = b$ dapat dinyatakan sebagai,

$$Rx = Q^T b$$

dan solusinya dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$x = R^{-1} Q^T b \tag{2.13}$$

Bukti :

Jika A adalah matriks non-singular yaitu :

$$Ax = b,$$

kemudian A didekomposisikan ke dalam sebuah hasil kali QR, maka persamaan-persamaan ini dapat dirubah kedalam bentuk sebagai berikut :

$$QRx = b,$$

Karena Q merupakan kolom-kolom ortonormal, sehingga

$$Rx = Q^T b,$$

Karena R dapat dibalik, maka solusi dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$x = R^{-1}Q^T b \qquad \blacksquare$$

Contoh 2.4 :

Gunakan Dekomposisi QR untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 9 \\ x_1 \qquad - 2x_3 + 7x_4 &= 11 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 10 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

Dibentuk:

$$A = \begin{matrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 7 \\ 3 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} 9 \\ 11 \\ 8 \\ 10 \end{matrix}$$

Matriks A dapat dinyatakan ke dalam bentuk matriks kolom $A = u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4$, dengan:

$$u_1 = \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}, \quad u_2 = \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{matrix}, \quad u_3 = \begin{matrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}, \quad u_4 = \begin{matrix} 4 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{matrix}, \text{ diperoleh :}$$

Untuk menentukan matriks Q maka dilakukan proses gram-schmidt sebagai berikut:

1) $v_1 = u_1 = (2, 1, 3, 2)$

Karena $\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{18}$ maka,

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{matrix} 0.4717 \\ 0.2357 \\ 0.7071 \\ 0.4714 \end{matrix} .$$

2) $v_2 = u_2 - Proj_{W1}\, u_2$

$$= u_2 - \frac{\langle u_2 , v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$= \;\; -1, 0, -3, 1 \;\; - \frac{-1, 0, -3, 1 \quad 2, 1, 3, 2}{\sqrt{18}\;\; ^2} \;\; 2, 1, 3, 2$$

$$= \;\; -1, 0, -3, 1 \;\; - \frac{-18, -9, -27, -18}{18} = \;\; 0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2 \;\; .$$

Karena $\|v_2\| = \sqrt{\;0\;^2 + \;\frac{1}{2}\;^2 + \;-\frac{3}{2}\;^2 + \;2\;^2} = \sqrt{\frac{13}{2}}$ maka,

$$q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{matrix} 0 \\ 0.1961 \\ -0.5883 \\ 0.7845 \end{matrix} .$$

3) $v_3 = u_3 - Proj_{W2}\, u_3$

$$= u_3 - \frac{\langle u_3 , v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3 , v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$= \;\; 3, -2, 1, 4 \;\; - \frac{3, -2, 1, 4 \quad 2, 1, 3, 2}{\sqrt{18}\;\; ^2} \;\; 2, 1, 3, 2$$

$$- \frac{3, -2, 1, 4 \quad 0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2}{\sqrt{\frac{13}{2}}\;\; ^2} \;\; 0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2$$

$$= \;\; 3, -2, 1, 4 \;\; - \;\; \frac{5}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3} \;\; - \;\; 0, \frac{11}{26}, -\frac{33}{26}, \frac{22}{13}$$

$$= \;\; \frac{4}{3}, -\frac{127}{39}, -\frac{3}{13}, \frac{25}{39} \;\; .$$

Karena $\|v_3\| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{127}{39}\right)^2 + \left(-\frac{3}{13}\right)^2 + \left(\frac{25}{39}\right)^2} = \sqrt{\frac{167}{13}}$ maka,

$$q_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{bmatrix} 0.3720 \\ -0,9086 \\ -0.0644 \\ 0.1789 \end{bmatrix}.$$

4) $v_4 = u_4 - Proj_{W_3}\, u_4$

$$= u_4 - \frac{\langle u_4\,, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_4\,, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_4\,, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3$$

$$= (4, 7, 5, 4) - \frac{(4, 7, 5, 4)\cdot(2, 1, 3, 2)}{\left(\sqrt{18}\right)^2}(2, 1, 3, 2)$$

$$- \frac{(4, 7, 5, 4)\cdot\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2\right)}{\left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$- \frac{(4, 7, 5, 4)\cdot\left(\frac{4}{3}, -\frac{127}{39}, -\frac{3}{13}, \frac{25}{39}\right)}{\left(\sqrt{\frac{167}{13}}\right)^2}\left(\frac{4}{3}, -\frac{127}{39}, -\frac{3}{13}, \frac{25}{39}\right)$$

$$= \left(\frac{2170}{1503}, \frac{770}{1503}, -\frac{350}{501}, -\frac{980}{1503}\right)$$

Karena $\|v_3\| = \sqrt{\left(\frac{2170}{1503}\right)^2 + \left(\frac{770}{1503}\right)^2 + \left(-\frac{350}{501}\right)^2 + \left(-\frac{980}{1503}\right)^2} = \sqrt{\frac{4900}{1503}}$

maka,

$$q_4 = \frac{v_4}{\|v_4\|} = \begin{bmatrix} 0.7996 \\ 0.2837 \\ -0,3870 \\ -0.3611 \end{bmatrix}.$$

Sehingga dapat dibentuk matriks *Q*, yaitu:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.4714 & 0 & 0.3720 & 0.7996 \\ 0.2357 & 0.1961 & -0.9086 & 0.2837 \\ 0.7071 & -0.5883 & -0.0644 & -0.3870 \\ 0.4714 & 0.7845 & 0.1789 & -0.3611 \end{bmatrix}$$

Sehingga, didapatkan matriks R yaitu sebagai berikut:

$$R = \begin{bmatrix} \langle u_1, q_1 \rangle & \langle u_2, q_1 \rangle & \langle u_3, q_1 \rangle & \langle u_4, q_1 \rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2 \rangle & \langle u_3, q_2 \rangle & \langle u_4, q_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle u_3, q_3 \rangle & \langle u_4, q_3 \rangle \\ 0 & 0 & 0 & \langle u_4, q_4 \rangle \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4.2426 & -2.1213 & 3.5355 & 8.9567 \\ 0 & 2.5494 & 2.1575 & 1.5692 \\ 0 & 0 & 3.5843 & -4.4783 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8049 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari matriks R^{-1} dan Q^T:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2357 & 0.1961 & -0.3505 & -2.2099 \\ 0 & 0.3922 & -0.2361 & 1.5692 \\ 0 & 0 & 0.2790 & -0.9268 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6922 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 0.4714 & 0.2357 & 0.7071 & 0.4714 \\ 0 & 0.1961 & -0.5883 & 0.7845 \\ 0.3720 & -0.9086 & -0.0644 & 0.1789 \\ 0.7996 & 0.2837 & -0.3870 & -0.3611 \end{bmatrix}$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (2.13) maka :

$$X = R^{-1} Q^T B$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2357 & 0.1961 & -0.3505 & -2.2099 \\ 0 & 0.3922 & -0.2361 & 1.5692 \\ 0 & 0 & 0.2790 & -0.9268 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6922 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4714 & 0.2357 & 0.7071 & 0.4714 \\ 0 & 0.1961 & -0.5883 & 0.7845 \\ 0.3720 & -0.9086 & -0.0644 & 0.1789 \\ 0.7996 & 0.2837 & -0.3870 & -0.3611 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

maka di dapatkan nilai untuk $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ dan $x_4 = 2$.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah studi pustaka dengan mempelajari literatur-literatur yang berhubungan dengan pokok permasalahan. Dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1) Diberikan sistem persamaan linear kompleks.
2) Mengubah sistem persamaan linear kompleks ke dalam bentuk persamaan matriks *AX=B.*
3) Membentuk matriks *AX=B* menjadi matriks $\begin{matrix} D & -E \\ E & D \end{matrix} \begin{matrix} P \\ S \end{matrix} = \begin{matrix} U \\ V \end{matrix}$.
4) Menentukan matriks *Q* dengan proses Gram-Schmidt sebagai berikut:

   $$q_i = \frac{v_i}{||v_i||}$$

   dengan,

   $$v_i = u_i - \frac{\langle u_i, v_1 \rangle}{||v_1||^2} v_1 - \cdots - \frac{\langle u_i, v_{i-1} \rangle}{||v_{i-1}||^2} v_{i-1}, \text{ untuk } i = 2,3,4, \dots, n$$

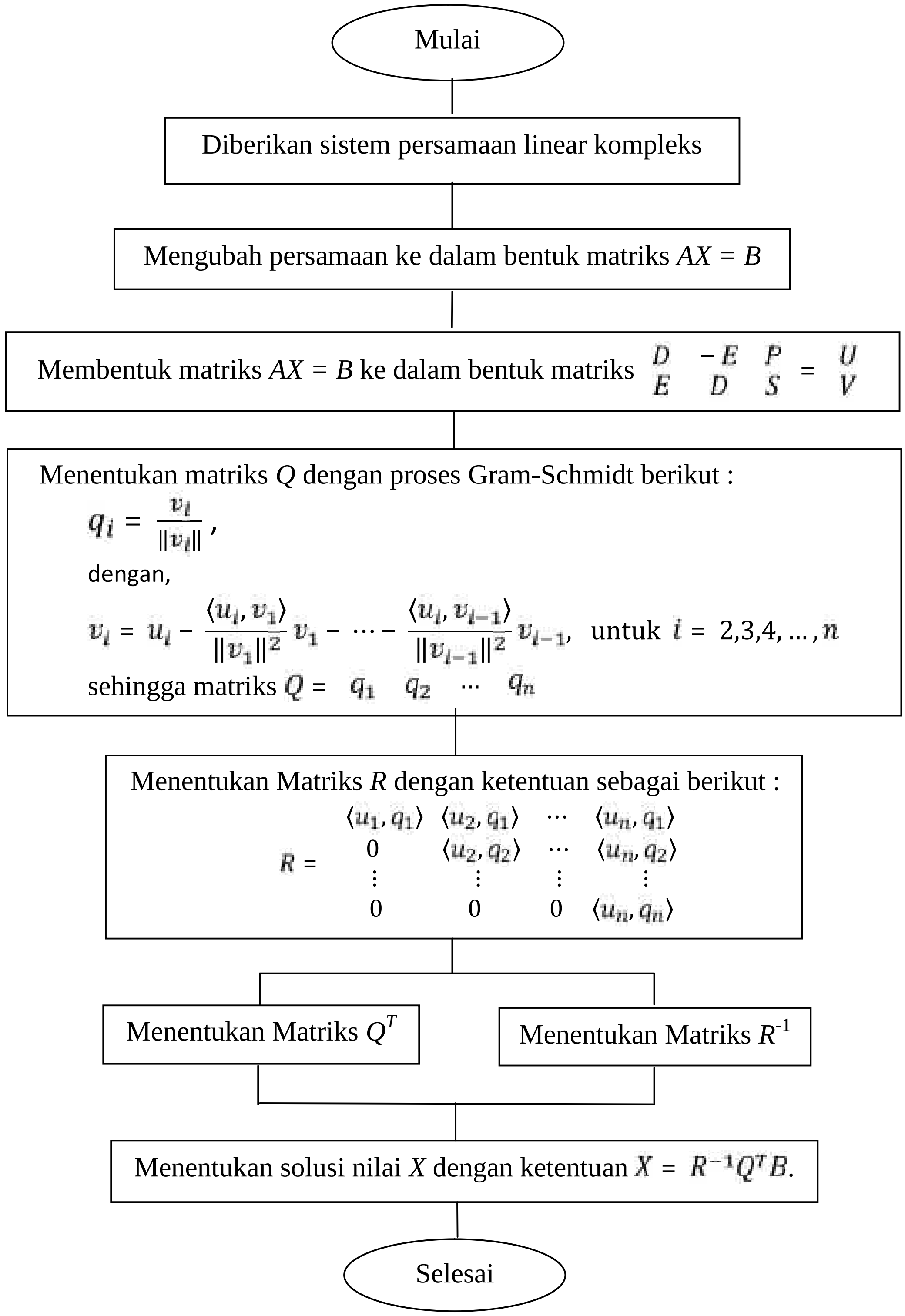
   sehingga matriks $Q = \begin{matrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{matrix}$.

5) Menentukan matriks segitiga atas *R* dengan menggunakan ketentuan sebagai berikut :

   $$R = \begin{matrix} \langle u_1, q_1 \rangle & \langle u_2, q_1 \rangle & \cdots & \langle u_n, q_1 \rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2 \rangle & \cdots & \langle u_n, q_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \langle u_n, q_n \rangle \end{matrix} .$$

6) Menentukan matriks Q^T.
7) Menentukan matriks R^{-1}.
8) Menentukan solusi nilai X dari operasi matriks $QR\ X = B$ dengan ketentuan $X = R^{-1} Q^T B$.

Langkah-langkah metodologi penelitian diatas juga dapat gambarkan pada *flowchart* berikut ini :



Gambar 3.1 *Flowchart* Metodologi Penelitian

BAB IV

ANALISA DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dijelaskan tentang penyelesaian sistem persamaan linear kompleks menggunakan metode dekomposisi *QR*. Sistem persamaan linear dapat dibentuk dalam bentuk persamaan $AX = B$ dengan *A* merupakan matriks koefisien yang akan ditentukan bentuk *QR*-nya dan selanjutnya akan ditentukan solusi nilai x dari sistem persamaan linearnya.

Berikut akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linear kompleks dengan menggunakan metode dekomposisi *QR*.

Contoh 4.1:

Diberikan sistem persamaan linear kompleks dengan 6 persamaan dan 6 variabel sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
(2+3i)x_1 + (1+i)x_2 + (4+2i)x_3 + (2+2i)x_4 + (3+i)x_5 + (1+2i)x_6 &= (2+3i) \\
(4+2i)x_1 + (2+i)x_2 + (5+2i)x_3 + (1+4i)x_4 + (2+2i)x_5 + (2+2i)x_6 &= (3+2i) \\
(1+2i)x_1 + (2+3i)x_2 + (2+i)x_3 + (3+2i)x_4 + (5+i)x_5 + (2+i)x_6 &= (1+3i) \\
(2+3i)x_1 + (2+i)x_2 + (3+3i)x_3 + (4+i)x_4 + (3+i)x_5 + (1+i)x_6 &= (2+2i) \\
(1+2i)x_1 + (1+4i)x_2 + (2+3i)x_3 + (2+i)x_4 + (3+i)x_5 + (2+3i)x_6 &= (4+2i) \\
(2+i)x_1 + (3+2i)x_2 + (3+i)x_3 + (2+2i)x_4 + (2+2i)x_5 + (2+3i)x_6 &= (3+3i)
\end{aligned}
$$

Selesaikan sistem persamaan linear kompleks di atas menggunakan metode dekomposisi *QR*.

Penyelesaian:

Berdasarkan soal di atas maka didapatkan sistem persamaan linear kompleks, yaitu $AX = B$ sebagai berikut :

$$
\begin{bmatrix}
(2+3i) & (1+i) & (4+2i) & (2+2i) & (3+i) & (1+2i) \\
(4+2i) & (2+i) & (5+2i) & (1+4i) & (2+2i) & (2+2i) \\
(1+2i) & (2+3i) & (2+i) & (3+2i) & (5+i) & (2+i) \\
(2+3i) & (2+i) & (3+3i) & (4+i) & (3+i) & (1+i) \\
(1+2i) & (1+4i) & (2+3i) & (2+i) & (3+i) & (2+3i) \\
(2+i) & (3+2i) & (3+i) & (2+2i) & (2+2i) & (2+3i)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} (2+3i) \\ (3+2i) \\ (1+3i) \\ (2+2i) \\ (4+2i) \\ (3+3i) \end{bmatrix}
$$

Selanjutnya, dari persamaan (2.7) maka akan diperoleh matriks sebagai berikut:

$$
D = \begin{bmatrix}
2 & 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\
4 & 2 & 5 & 1 & 2 & 2 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 5 & 2 \\
2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\
2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2
\end{bmatrix}, \qquad
E = \begin{bmatrix}
2 & 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\
4 & 2 & 5 & 1 & 2 & 2 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 5 & 2 \\
2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\
2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2
\end{bmatrix},
$$

$$
P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}, \qquad
S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix}, \qquad
U = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad
V = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.
$$

Selanjutnya mengubah matriks *D, E, P, S, U* dan *V* ke dalam bentuk matriks pada persamaan (2.8) sebagai berikut :

$$
\begin{bmatrix}
2 & 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & -3 & -1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\
4 & 2 & 5 & 1 & 2 & 2 & -2 & -1 & -2 & -4 & -2 & -2 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 5 & 2 & -2 & -3 & -1 & -2 & -1 & -1 \\
2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & -3 & -1 & -3 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & -2 & -4 & -3 & -1 & -1 & -3 \\
2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -2 & -3 \\
3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\
2 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 5 & 1 & 2 & 2 \\
2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 5 & 2 \\
3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\
2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Sehingga, dari matriks diatas maka diperoleh vektor kolom $u_1 | u_2 | \ldots | u_{12}$ sebagai berikut :

$$u_1 = [2|4|1|2|1|2|3|2|2|3|2|1], \qquad u_2 = [1|2|2|2|1|3|1|1|3|1|4|2],$$
$$u_3 = [4|5|2|3|2|3|2|2|1|3|3|1], \qquad u_4 = [2|1|3|4|2|2|2|4|2|1|1|2],$$
$$u_5 = [3|2|5|3|3|2|1|2|1|1|1|2], \qquad u_6 = [1|2|2|1|2|2|2|2|1|1|3|3],$$
$$u_7 = [-3|-2|-2|-3|-2|-1|2|4|1|2|1|2], \qquad u_8 = [-1|-1|-3|-1|-4|-2|1|2|2|2|1|3],$$
$$u_9 = [-2|-2|-1|-3|-3|-1|4|5|2|3|2|3], \qquad u_{10} = [-2|-4|-2|-1|-1|-2|2|4|2|1|1|2],$$
$$u_{11} = [-1|-2|-1|-1|-1|-2|3|2|5|3|3|2], \qquad u_{12} = [-2|-2|-1|-1|-3|-3|1|2|2|1|2|2]$$

Selanjutnya yaitu menentukan matriks Q menggunakan proses Gram-Schmidt dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_1 = u_1$$
$$= 2, 4, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 1$$
$$\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2}$$
$$= 7{,}810249676$$

Sehingga didapatkan vektor kolom q_1 yaitu :

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{matrix} 0.2561 \\ 0.5121 \\ 0.1280 \\ 0.2561 \\ 0.1280 \\ 0.2561 \\ 0.3841 \\ 0.2561 \\ 0.2561 \\ 0.3841 \\ 0.2561 \\ 0.1280 \end{matrix}$$

2) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_2 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_2 = u_2 - Proj_{W1}\, u_2$$
$$= u_2 - \frac{\langle u_2 , v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_2 yaitu :

$$q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{matrix} -0.1248 \\ -0.2496 \\ 0.2837 \\ 0.1059 \\ 0.0530 \\ 0.3366 \\ -0.3026 \\ -0.1248 \\ 0.3366 \\ -0.3026 \\ 0.5673 \\ 0.2837 \end{matrix}$$

3) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_3 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_3 = u_3 - Proj_{W2}\, u_3$$

$$= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_3 yaitu :

$$q_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{matrix} 0.5692 \\ 0.1575 \\ 0.1926 \\ 0.1809 \\ 0.2539 \\ 0.1195 \\ -0.4234 \\ -0.0847 \\ -0.5344 \\ -0.0964 \\ 0.0582 \\ -0.1344 \end{matrix}$$

4) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_4 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_4 = u_4 - Proj_{W3}\, u_4$$

$$= u_4 - \frac{\langle u_4, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_4, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_4, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_4 yaitu :

$$q_4 = \frac{v_4}{\| v_4 \|} = \begin{matrix} 0.0335 \\ -0.4027 \\ 0.3104 \\ 0.4234 \\ 0.1848 \\ -0.0823 \\ 0.0976 \\ 0.5621 \\ 0.0254 \\ -0.1667 \\ -0.3776 \\ 0.1538 \end{matrix}$$

5) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_5 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_5 = u_5 - Proj_{w4}\, u_5$$

$$= u_5 - \frac{\langle u_5 , v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_5 , v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_5 , v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3 - \frac{\langle u_5 , v_4 \rangle}{\| v_4 \|^2} v_4$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_5 yaitu :

$$q_5 = \frac{v_5}{\| v_5 \|} = \begin{matrix} -0.0625 \\ 0.1362 \\ 0.7098 \\ -0.3294 \\ 0.2486 \\ -0.1640 \\ 0.1159 \\ -0.3798 \\ 0.0807 \\ 0.0847 \\ -0.2797 \\ 0.1642 \end{matrix}$$

6) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_6 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_6 = u_6 - Proj_{W5}\, u_6$$

$$= u_6 - \frac{\langle u_6, v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_6 , v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_6 , v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3 - \frac{\langle u_6 , v_4 \rangle}{\| v_4 \|^2} v_4$$

$$- \frac{\langle u_6 , v_5 \rangle}{\| v_5 \|^2} v_5$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_6 yaitu :

$$q_6 = \frac{v_6}{\| v_6 \|} = \begin{matrix} -0.1185 \\ -0.0016 \\ -0.1442 \\ -0.3812 \\ 0.2806 \\ -0.0558 \\ 0.2287 \\ 0.2600 \\ -0.4954 \\ -0.1051 \\ 0.2724 \\ 0.5361 \end{matrix}$$

7) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_7 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_7 = u_7 - Proj_{W6}\, u_7$$

$$= u_7 - \frac{\langle u_7 , v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_7 , v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_7 , v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3 - \frac{\langle u_7 , v_4 \rangle}{\| v_4 \|^2} v_4$$

$$- \frac{\langle u_7 , v_5 \rangle}{\| v_5 \|^2} v_5 - \frac{\langle u_7 , v_6 \rangle}{\| v_6 \|^2} v_6$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_7 yaitu :

$$q_7 = \frac{v_7}{\| v_7 \|} = \begin{matrix} 0.1210 \\ -0.2201 \\ 0.2561 \\ -0.4081 \\ -0.3181 \\ -0.0416 \\ -0.3525 \\ 0.4256 \\ 0.0043 \\ 0.5229 \\ 0.1416 \\ -0.0546 \end{matrix}$$

8) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_8 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_8 = u_8 - Proj_{W7}\, u_8$$

$$= u_8 - \frac{\langle u_8 , v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_8 , v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_8 , v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3 - \frac{\langle u_8 , v_4 \rangle}{\| v_4 \|^2} v_4$$

$$- \frac{\langle u_8 , v_5 \rangle}{\| v_5 \|^2} v_5 - \frac{\langle u_8 , v_6 \rangle}{\| v_6 \|^2} v_6 - \frac{\langle u_8 , v_7 \rangle}{\| v_7 \|^2} v_7$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_8 yaitu :

$$q_8 = \frac{v_8}{\|v_8\|} = \begin{matrix} 0.3562 \\ 0.0455 \\ -0.1018 \\ 0.2112 \\ -0.4128 \\ -0.4303 \\ -0.1129 \\ -0.1999 \\ 0.0868 \\ 0.0314 \\ -0.0502 \\ 0.6299 \end{matrix}$$

9) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_9 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_9 = u_9 - Proj_{W8}\, u_9$$

$$= u_9 - \frac{\langle u_9 , v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_9 , v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_9 , v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3 - \frac{\langle u_9 , v_4 \rangle}{\|v_4\|^2} v_4$$

$$- \frac{\langle u_9 , v_5 \rangle}{\|v_5\|^2} v_5 - \frac{\langle u_9 , v_6 \rangle}{\|v_6\|^2} v_6 - \frac{\langle u_9 , v_7 \rangle}{\|v_7\|^2} v_7 - \frac{\langle u_9 , v_8 \rangle}{\|v_8\|^2} v_8$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_9 yaitu :

$$q_9 = \frac{v_9}{\|v_9\|} = \begin{matrix} 0.3977 \\ -0.3380 \\ 0.2076 \\ -0.1066 \\ -0.3492 \\ 0.0119 \\ 0.5962 \\ -0.1178 \\ -0.1284 \\ -0.2229 \\ 0.2467 \\ -0.2339 \end{matrix}$$

10) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_{10} dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_{10} = u_{10} - Proj_{W9}\, u_{10}$$

$$= u_{10} - \frac{\langle u_{10} , v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_{10} , v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_{10} , v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3 - \frac{\langle u_{10} , v_4 \rangle}{\|v_4\|^2} v_4$$

$$- \frac{\langle u_{10} , v_5 \rangle}{\|v_5\|^2} v_5 - \frac{\langle u_{10} , v_6 \rangle}{\|v_6\|^2} v_6 - \frac{\langle u_{10} , v_7 \rangle}{\|v_7\|^2} v_7 - \frac{\langle u_{10} , v_8 \rangle}{\|v_8\|^2} v_8$$

$$- \frac{\langle u_{10} , v_9 \rangle}{\|v_9\|^2} v_9$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_{10} yaitu :

$$q_{10} = \frac{v_{10}}{\| v_{10} \|} = \begin{matrix} 0.0805 \\ -0.4969 \\ -0.1829 \\ 0.1815 \\ 0.4720 \\ -0.2224 \\ 0.0839 \\ -0.3021 \\ 0.0286 \\ 0.5171 \\ 0.2003 \\ -0.0372 \end{matrix}$$

11) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_{11} dengan mengoperasikan bentuk :

$$\begin{aligned} v_{11} &= u_{11} - Proj_{W10}\, u_{11} \\ &= u_{11} - \frac{\langle u_{11}, v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_{11}, v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_{11}, v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3 - \frac{\langle u_{11}, v_4 \rangle}{\| v_4 \|^2} v_4 \\ &\quad - \frac{\langle u_{11}, v_5 \rangle}{\| v_5 \|^2} v_5 - \frac{\langle u_{11}, v_6 \rangle}{\| v_6 \|^2} v_6 - \frac{\langle u_{11}, v_7 \rangle}{\| v_7 \|^2} v_7 - \frac{\langle u_{11}, v_8 \rangle}{\| v_8 \|^2} v_8 \\ &\quad - \frac{\langle u_{11}, v_9 \rangle}{\| v_9 \|^2} v_9 - \frac{\langle u_{11}, v_{10} \rangle}{\| v_{10} \|^2} v_{10} \end{aligned}$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_{11} yaitu :

$$q_{11} = \frac{v_{11}}{\| v_{11} \|} = \begin{matrix} 0.2656 \\ 0.1488 \\ -0.0829 \\ -0.2407 \\ 0.3107 \\ -0.5535 \\ -0.0825 \\ 0.2370 \\ 0.4083 \\ -0.3344 \\ 0.2123 \\ -0.2303 \end{matrix}$$

12) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_{12} dengan mengoperasikan bentuk:

$$\begin{aligned} v_{12} &= u_{12} - Proj_{W1}\, u_{12} \\ &= u_{12} - \frac{\langle u_{12}, v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_{12}, v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_{12}, v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3 - \frac{\langle u_{12}, v_4 \rangle}{\| v_4 \|^2} v_4 \\ &\quad - \frac{\langle u_{12}, v_5 \rangle}{\| v_5 \|^2} v_5 - \frac{\langle u_{12}, v_6 \rangle}{\| v_6 \|^2} v_6 - \frac{\langle u_{12}, v_7 \rangle}{\| v_7 \|^2} v_7 - \frac{\langle u_{12}, v_8 \rangle}{\| v_8 \|^2} v_8 \end{aligned}$$

$$- \frac{\langle u_{12}, v_9 \rangle}{\| v_9 \|^2} v_9 - \frac{\langle u_{12}, v_{10} \rangle}{\| v_{10} \|^2} v_{10} - \frac{\langle u_{12}, v_{11} \rangle}{\| v_{11} \|^2} v_{11}$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_{12} yaitu :

$$q_{12} = \frac{v_{12}}{\| v_{12} \|} = \begin{matrix} -0.4463 \\ 0.1900 \\ 0.2928 \\ 0.3796 \\ -0.1697 \\ -0.4767 \\ 0.0072 \\ 0.0375 \\ -0.3024 \\ 0.0480 \\ 0.3815 \\ -0.1952 \end{matrix} .$$

Dari langkah-langkah yang telah dilakukan untuk memperoleh vektor kolom $u_1 | u_2 | \ldots | u_{12}$ maka dapat dibentuk matriks *Q* sebagai berikut :

$$Q = \begin{matrix} 0.2561 & -0.1248 & 0.5692 & 0.0335 & -0.0625 & -0.1185 \\ 0.5121 & -0.2496 & 0.1575 & -0.4027 & 0.1362 & -0.0016 \\ 0.1280 & 0.2837 & 0.1926 & 0.3104 & 0.7098 & -0.1442 \\ 0.2561 & 0.1059 & 0.1809 & 0.4234 & -0.3294 & -0.3812 \\ 0.1280 & 0.0530 & 0.2539 & 0.1848 & 0.2486 & 0.2806 \\ 0.2561 & 0.3366 & 0.1195 & -0.0823 & -0.1640 & -0.0558 \\ 0.3841 & -0.3026 & -0.4234 & 0.0976 & 0.1159 & 0.2287 \\ 0.2561 & -0.1248 & -0.0847 & 0.5621 & -0.3798 & 0.2600 \\ 0.2561 & 0.3366 & -0.5344 & 0.0254 & 0.0807 & -0.4954 \\ 0.3841 & -0.3026 & -0.0964 & -0.1667 & 0.0847 & -0.1051 \\ 0.2561 & 0.5673 & 0.0582 & -0.3776 & -0.2797 & 0.2724 \\ 0.1280 & 0.2837 & -0.1344 & 0.1538 & 0.1642 & 0.5361 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0.1210 & 0.3562 & 0.3977 & 0.0805 & 0.2656 & -0.4463 \\ -0.2201 & 0.0455 & -0.3380 & -0.4969 & 0.1488 & 0.1900 \\ 0.2561 & -0.1018 & 0.2076 & -0.1829 & -0.0829 & 0.2928 \\ -0.4081 & 0.2112 & -0.1066 & 0.1815 & -0.2407 & 0.3796 \\ -0.3181 & -0.4128 & -0.3492 & 0.4720 & 0.3107 & -0.1697 \\ -0.0416 & -0.4303 & 0.0119 & -0.2224 & -0.5535 & -0.4767 \\ -0.3525 & -0.1129 & 0.5962 & 0.0839 & -0.0825 & 0.0072 \\ 0.4256 & -0.1999 & -0.1178 & -0.3021 & 0.2370 & 0.0375 \\ 0.0043 & 0.0868 & -0.1284 & 0.0286 & 0.4083 & -0.3024 \\ 0.5229 & 0.0314 & -0.2229 & 0.5171 & -0.3344 & 0.0480 \\ 0.1416 & -0.0502 & 0.2467 & 0.2003 & 0.2123 & 0.3815 \\ -0.0546 & 0.6299 & -0.2339 & -0.0372 & -0.2303 & -0.1952 \end{matrix} .$$

Selanjutnya, untuk menentukan matriks segitiga atas *R* dengan menggunakan ketentuan sebagai berikut :

$$R = \begin{bmatrix} \langle u_1, q_1 \rangle & \langle u_2, q_1 \rangle & \cdots & \langle u_n, q_1 \rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2 \rangle & \cdots & \langle u_n, q_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \langle u_n, q_n \rangle \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan matriks *R* yaitu :

$$R = \begin{bmatrix} 7.8102 & 6.0177 & 9.2187 & 6.4018 & 6.1458 & 5.6336 \\ 0 & 4.3344 & 0.8132 & 1.9554 & 2.3109 & 2.5605 \\ 0 & 0 & 3.0586 & 0.7826 & 3.0946 & 0.3215 \\ 0 & 0 & 0 & 4.7519 & 3.5176 & 0.9840 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.6342 & 0.7605 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.4609 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.0000 & 0.3841 & 2.3047 & 0.3841 & 2.8168 & -0.5121 \\ -0.6921 & -0.5333 & -0.4312 & 0.6203 & 1.3956 & 0.7111 \\ -5.7010 & -4.9393 & -6.8316 & -5.8998 & -6.2453 & -4.8574 \\ 0.5923 & -0.5368 & 1.1438 & 0.1989 & 0.2369 & 0.3555 \\ -1.8381 & -2.6402 & -1.5375 & -1.2285 & -0.7757 & -1.4102 \\ 3.4217 & 1.3515 & 3.8039 & 1.1717 & 0.7812 & 1.3609 \\ 3.5471 & 2.6254 & 4.5771 & 2.9345 & 2.5717 & 2.6334 \\ 0 & 3.7674 & 0.9393 & 1.4911 & 1.6156 & 2.4682 \\ 0 & 0 & 1.6907 & 0.3970 & 1.0177 & 0.6980 \\ 0 & 0 & 0 & 4.3296 & 2.7556 & 0.4654 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9982 & 1.0612 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6776 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, didapatkan matriks R^{-1} dengan bantuan software MATLAB 7.0 sebagai berikut :

$$
R^{-1} = \begin{array}{cccccc}
0.1280 & -0.1778 & -0.3386 & -0.0436 & 0.3132 & -0.1433 \\
0 & 0.2307 & -0.0613 & -0.0848 & -0.0171 & 0.1929 \\
0 & 0 & 0.3269 & -0.0538 & -0.3122 & 0.0753 \\
0 & 0 & 0 & 0.2104 & -0.2810 & 0.0027 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.3796 & -0.1173 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4064 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
-0.2711 & -0.0285 & -0.2016 & -0.1056 & -0.3116 & 0.3006 \\
0.1378 & -0.0986 & -0.0315 & -0.1219 & -0.1874 & -0.0210 \\
0.3001 & -0.0339 & 0.1107 & 0.1372 & 0.2733 & -0.0435 \\
-0.1834 & -0.0401 & 0.1147 & 0.0375 & 0.0233 & -0.0090 \\
0.3099 & 0.0922 & -0.2810 & -0.0766 & -0.0315 & -0.0497 \\
-0.3920 & 0.1274 & 0.0762 & 0.1049 & 0.0592 & 0.0000 \\
0.2819 & -0.1965 & -0.6541 & -0.0634 & 0.2166 & -0.0008 \\
0 & 0.2654 & -0.1475 & -0.0779 & -0.0321 & -0.2873 \\
0 & 0 & 0.5915 & -0.0542 & -0.2264 & -0.0878 \\
0 & 0 & 0 & 0.2310 & -0.3185 & 0.1374 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.5005 & -0.3166 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5961
\end{array}
$$

Selanjutnya, akan ditentukan matriks Q^t yaitu :

$$Q^T = \begin{matrix} 0.2561 & 0.5121 & 0.1280 & 0.2561 & 0.1280 & 0.2561 \\ -0.1248 & -0.2496 & 0.2837 & 0.1059 & 0.0530 & 0.3366 \\ 0.5692 & 0.1575 & 0.1926 & 0.1809 & 0.2539 & 0.1195 \\ 0.0335 & -0.4027 & 0.3104 & 0.4234 & 0.1848 & -0.0823 \\ -0.0625 & 0.1362 & 0.7098 & -0.3294 & 0.2486 & -0.1640 \\ -0.1185 & -0.0016 & -0.1442 & -0.3812 & 0.2806 & -0.0558 \\ 0.1210 & -0.2201 & 0.2561 & -0.4081 & -0.3181 & -0.0416 \\ 0.3562 & 0.0455 & -0.1018 & 0.2112 & -0.4128 & -0.4303 \\ 0.3977 & -0.3380 & 0.2076 & -0.1066 & -0.3492 & 0.0119 \\ 0.0805 & -0.4969 & -0.1829 & 0.1815 & 0.4720 & -0.2224 \\ 0.2656 & 0.1488 & -0.0829 & -0.2407 & 0.3107 & -0.5535 \\ -0.4463 & 0.1900 & 0.2928 & 0.3796 & -0.1697 & -0.4767 \\ 0.3841 & 0.2561 & 0.3841 & 0.3841 & 0.2561 & 0.1280 \\ -0.3026 & -0.1248 & 0.3366 & -0.3026 & 0.5673 & 0.2837 \\ -0.4234 & -0.0847 & -0.5344 & -0.0964 & 0.0582 & 0.1344 \\ 0.0976 & 0.5621 & 0.0254 & -0.1667 & -0.3776 & 0.1538 \\ 0.1159 & -0.3798 & 0.0807 & 0.0847 & -0.2797 & 0.1642 \\ 0.2287 & 0.2600 & -0.4954 & -0.1051 & 0.2724 & 0.5361 \\ -0.3525 & 0.4256 & 0.0043 & 0.5229 & 0.1416 & -0.0546 \\ -0.1129 & -0.1999 & 0.0868 & 0.0314 & -0.0502 & 0.6299 \\ 0.5962 & -0.1178 & 0.1284 & -0.2229 & 0.2467 & -0.2339 \\ 0.0839 & -0.3021 & -0.0286 & 0.5171 & 0.2003 & -0.0372 \\ -0.0825 & 0.2370 & 0.4083 & -0.3344 & 0.2123 & -0.2303 \\ 0.0072 & 0.0375 & -0.3024 & 0.0480 & 0.3815 & -0.1952 \end{matrix}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (2.13) maka didapatkan nilai X sebagai berikut :

$$X = R^{-1}Q^T B = \begin{matrix} 0.4040 \\ -0.2775 \\ -0.3464 \\ 0.2987 \\ -0.0580 \\ 1.1636 \\ 0.4240 \\ 0.4984 \\ -0.6422 \\ -0.1660 \\ 0.8629 \\ -1.1425 \end{matrix} .$$

Sehingga didapatkan solusi dari sistem persamaan linear kompleks di atas adalah sebagai berikut :

$$X_1 = \quad 0.4040 + \ 0.4240i$$
$$X_2 = \ -0.2775 + \ 0.4984i$$
$$X_3 = \ -0.3464 - \ 0.6422i$$
$$X_4 = (0.2987 - \ 0.1660i)$$
$$X_5 = \ -0.0580 + \ 0.8629i$$
$$X_6 = (1.1636 - \ 1.1425i)$$

Contoh 4.2 :

Diberikan sistem persamaan linear kompleks untuk 7 persamaan dan 7 variabel sebagai berikut :

$$(2-3i)x_1 + (4+2i)x_2 - (2\text{-}4i)x_3 + (2+2i)x_4 - (2\text{-}i)x_5 - (2-2i)x_6 + (3-3i)x_7 = (4+3i)$$
$$(2+i)x_1 + (2+3i)x_2 - (3+i)x_3 + (2+2i)x_4 - (2+i)x_5 + (3+2i)x_6 - (4+2i)x_7 = (3+3i)$$
$$(3+3i)x_1 - (2-3i)x_2 - (4+2i)x_3 + (2+i)x_4 - (3+i)x_5 + (2-2i)x_6 - (3-i)x_7 = (2+4i)$$
$$(3+2i)x_1 - (4+2i)x_2 + (2-4i)x_3 - (2-3i)x_4 - (1-i)x_5 - (2+2i)x_6 - (3-2i)x_7 = (3+2i)$$
$$(2+3i)x_1 + (4-2i)x_2 - (4-3i)x_3 - (2+2i)x_4 - (3-4i)x_5 - (2+3i)x_6 - (2+3i)x_7 = (2+4i)$$
$$(1+i)x_1 - (1-i)x_2 + (2+3i)x_3 - (2+i)x_4 + (3+2i)x_5 - (3-4i)x_6 + (3-2i)x_7 = (1+2i)$$
$$(2+i)x_1 - (3+2i)x_2 + (4+2i)x_3 - (2-2i)x_4 - (4+2i)x_5 - (4-i)x_6 + (4+4i)x_7 = (2+3i)$$

Selesaikan sistem persamaan linear kompleks di atas menggunakan metode dekomposisi QR.

Penyelesaian :

Berdasarkan sistem persamaan linear diatas maka didapatkan sistem persamaan linear kompleks $AX = B$ sebagai berikut :

$$
\begin{bmatrix}
(2-3i) & (4+2i) & (-2+4i) & (2+2i) & (-2+i) & (-2+2i) & (3-3i) \\
(2+i) & (2+3i) & (-3-i) & (2+2i) & (-2-i) & (3+2i) & (-4-2i) \\
(3+3i) & (-2+3i) & (-3-i) & (2+i) & (-3-i) & (2-2i) & (-3+i) \\
(3+2i) & (-4-2i) & (4+2i) & (-2+3i) & (-1+i) & (-2-2i) & (-3+2i) \\
(2+3i) & (4-2i) & (-4+3i) & (-2-2i) & (-3+4i) & (-2-3i) & (-2-3i) \\
(1+i) & (-1+i) & (2+3i) & (-2-i) & (3+2i) & (-3+4i) & (3-2i) \\
(2+i) & (-3-2i) & (4+2i) & (-2+2i) & (-4-2i) & (-4+i) & (4+4i)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} (4+2i) \\ (3+3i) \\ (2+4i) \\ (3+2i) \\ (2+4i) \\ (1+2i) \\ (2+3i) \end{bmatrix}
$$

Selanjutnya, dari persamaan (2.7) maka akan diperoleh matriks sebagai berikut:

$$
D = \begin{bmatrix}
2 & 4 & -2 & 2 & -2 & -2 & 3 \\
2 & 2 & -3 & 2 & -2 & 3 & -4 \\
3 & -2 & -3 & 2 & -3 & 2 & -3 \\
3 & -4 & 4 & -2 & -1 & -2 & -3 \\
2 & 4 & -4 & -2 & -3 & -2 & -2 \\
1 & -1 & 2 & -2 & 2 & -3 & 3 \\
2 & -3 & 4 & -2 & -4 & -4 & 4
\end{bmatrix}, \quad
E = \begin{bmatrix}
-3 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & -3 \\
1 & 3 & -1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\
3 & 3 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\
2 & -2 & 2 & 3 & 1 & -2 & 2 \\
3 & -2 & 3 & -2 & 4 & -3 & -3 \\
1 & 1 & 3 & -1 & 2 & 4 & -2 \\
1 & -2 & 2 & 2 & -2 & 1 & 4
\end{bmatrix}
$$

$$
P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \end{bmatrix}, \quad
S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix}, \quad
U = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad
V = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Selanjutnya mengubah matriks *D, E, P, S, U* dan *V* ke dalam bentuk matriks pada persamaan (2.8) sebagai berikut :

$$
\begin{bmatrix}
2 & 4 & -2 & 2 & -2 & -2 & 3 & 3 & -2 & -4 & -2 & -1 & -1 & 3 \\
2 & 2 & -3 & 2 & -2 & 3 & -4 & -1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -2 & 2 \\
3 & -2 & -3 & 2 & -3 & 2 & -3 & -3 & -3 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\
3 & -4 & 4 & -2 & -1 & -2 & -3 & -2 & 2 & -2 & -3 & -1 & 2 & -2 \\
2 & 4 & -4 & -2 & -3 & -2 & -2 & -3 & 2 & -3 & 2 & -4 & 3 & 3 \\
1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 3 & -1 & -1 & -3 & 1 & -2 & -4 & 2 \\
2 & -3 & 4 & -2 & 4 & -4 & -2 & -1 & 2 & -2 & -2 & 2 & -1 & -4 \\
-3 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & -3 & -1 & 4 & -2 & 2 & -2 & -2 & 3 \\
1 & 3 & -1 & 2 & -1 & 2 & -2 & -2 & 2 & -3 & 2 & -2 & 3 & -4 \\
3 & 3 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 & -2 & -3 & 2 & -3 & 2 & -3 \\
2 & 2 & 2 & 3 & 1 & -2 & 2 & 2 & -4 & 4 & -2 & -1 & -2 & -3 \\
3 & 2 & 3 & -2 & 4 & -3 & -3 & -3 & 4 & -4 & -2 & -3 & -2 & -2 \\
1 & 1 & 3 & -1 & 2 & 4 & -2 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 3 \\
1 & -2 & 2 & 2 & -2 & 1 & 4 & 2 & -3 & 4 & -2 & 4 & -4 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Sehingga, dari matriks diatas maka diperoleh vektor kolom $u_1 | u_2 | \dots | u_{14}$ yaitu sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= [\,2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | -3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 1\,], & u_2 &= [\,4 | 2 | -2 | -4 | 4 | -1 | -3 | 2 | 3 | 3 | -2 | -2 | 1 | -2\,], \\
u_3 &= [\,-2 | -3 | -3 | 4 | -4 | 2 | 4 | 4 | -1 | -1 | 2 | 3 | 3 | 2\,], & u_4 &= [\,2 | 2 | 2 | -2 | -2 | -2 | -2 | 2 | 2 | 1 | 3 | -2 | -1 | 2\,], \\
u_5 &= [\,-2 | -2 | -3 | -1 | -3 | 3 | -4 | 1 | -1 | -1 | 1 | 4 | 2 | -2\,], & u_6 &= [\,-2 | 3 | 2 | -2 | -2 | -3 | -4 | 2 | 2 | -2 | -2 | -3 | 4 | 1\,], \\
u_7 &= [\,3 | -4 | -3 | -3 | -2 | 3 | 4 | -3 | -2 | 1 | 2 | -3 | -2 | 4\,], & u_8 &= [\,3 | -1 | -3 | -2 | -3 | -1 | -1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1\,], \\
u_9 &= [\,-2 | -3 | -3 | 2 | 2 | -1 | 2 | 4 | 2 | -2 | -4 | 4 | -1 | -3\,], & u_{10} &= [\,-4 | 1 | 1 | -2 | -3 | -3 | -2 | -2 | -3 | -3 | 4 | -4 | 2 | 4\,], \\
u_{11} &= [\,-2 | -2 | -1 | -3 | 2 | 1 | -2 | 2 | 2 | 2 | -2 | -2 | -2 | -2\,], & u_{12} &= [\,-1 | 1 | 1 | -1 | -4 | -2 | 2 | -2 | -2 | -3 | -1 | -3 | 3 | -4\,] \\
u_{13} &= [\,3 | 2 | -1 | -2 | 3 | 2 | -4 | -2 | 3 | 2 | -2 | -2 | -3 | -4\,], & u_{14} &= [\,-2 | -2 | 2 | 2 | 3 | -4 | -1 | 3 | -4 | -3 | -3 | -2 | 3 | 4\,]
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, yaitu menentukan matriks *Q* menggunakan proses Gram-Schmidt dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_1 = u_1 = (2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1,\ 2, -3,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 1)$$

$$\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + -3^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2}$$

$$= 8.3066$$

Sehingga didapatkan vektor kolom q_1 yaitu :

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 0.2408 \\ 0.2408 \\ 0.3612 \\ 0.3612 \\ 0.2408 \\ 0.1204 \\ 0.2408 \\ -0.3612 \\ 0.1204 \\ 0.3612 \\ 0.2408 \\ 0.3612 \\ 0.1204 \\ 0.1204 \end{pmatrix}$$

2) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_2 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_2 = u_2 - Proj_{W1}\, u_2$$

$$= u_2 - \frac{\langle u_2 , v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_2 yaitu :

$$q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} 0.4300 \\ 0.2295 \\ -0.1569 \\ -0.3573 \\ 0.4300 \\ -0.0857 \\ -0.2716 \\ 0.1569 \\ 0.3152 \\ 0.3443 \\ -0.1714 \\ -0.1569 \\ 0.1148 \\ -0.1859 \end{pmatrix}$$

3) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_3 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_3 = u_3 - Proj_{W2}\, u_3$$

$$= u_3 - \frac{\langle u_3 , v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3 , v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_3 yaitu :

$$q_3 = \frac{v_3}{\| v_3 \|} = \begin{matrix} 0.0932 \\ -0.1652 \\ -0.4394 \\ 0.2112 \\ -0.1340 \\ 0.1703 \\ 0.2682 \\ 0.5530 \\ 0.1190 \\ 0.1499 \\ 0.1133 \\ 0.2424 \\ 0.4287 \\ 0.0979 \end{matrix}$$

4) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_4 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_4 = u_4 - Proj_{W3}\, u_4$$

$$= u_4 - \frac{\langle u_4 , v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_4 , v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_4 , v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_4 yaitu :

$$q_4 = \frac{v_4}{\| v_4 \|} = \begin{matrix} 0.1723 \\ 0.1999 \\ 0.2871 \\ -0.1335 \\ -0.4276 \\ -0.2313 \\ -0.1565 \\ 0.2976 \\ 0.2071 \\ 0.0681 \\ 0.5036 \\ -0.1914 \\ -0.1166 \\ 0.3596 \end{matrix}$$

5) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_5 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_5 = u_5 - Proj_{w4}\, u_5$$

$$= u_5 - \frac{\langle u_5 , v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_5 , v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_5 , v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3 - \frac{\langle u_5 , v_4 \rangle}{\| v_4 \|^2} v_4$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_5 yaitu :

$$q_5 = \frac{v_5}{\|v_5\|} = \begin{matrix} -0.0841 \\ -0.0159 \\ -0.0567 \\ -0.1851 \\ -0.2377 \\ 0.3097 \\ -0.6374 \\ -0.1427 \\ -0.0268 \\ 0.0322 \\ 0.2367 \\ 0.4964 \\ 0.1364 \\ -0.2308 \end{matrix}$$

6) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_6 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_6 = u_6 - Proj_{W5}\, u_6$$

$$= u_6 - \frac{\langle u_6, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_6 , v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_6 , v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 - \frac{\langle u_6 , v_4\rangle}{\|v_4\|^2} v_4$$

$$- \frac{\langle u_6 , v_5\rangle}{\|v_5\|^2} v_5$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_6 yaitu :

$$q_6 = \frac{v_6}{\|v_6\|} = \begin{matrix} -0.3185 \\ 0.3240 \\ 0.2670 \\ 0.1222 \\ -0.0692 \\ -0.1871 \\ -0.1743 \\ 0.0116 \\ 0.1608 \\ -0.1840 \\ -0.3271 \\ -0.0667 \\ 0.6752 \\ 0.1004 \end{matrix}$$

7) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_7 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_7 = u_7 - Proj_{W6}\, u_7$$

$$= u_7 - \frac{\langle u_7 , v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_7 , v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_7 , v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 - \frac{\langle u_7 , v_4\rangle}{\|v_4\|^2} v_4$$

$$- \frac{\langle u_7 , v_5\rangle}{\|v_5\|^2} v_5 - \frac{\langle u_7 , v_6\rangle}{\|v_6\|^2} v_6$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_7 yaitu :

$$q_7 = \frac{v_7}{\|v_7\|} = \begin{matrix} 0.1865 \\ -0.1674 \\ -0.1635 \\ -0.3810 \\ -0.1919 \\ 0.3048 \\ -0.1206 \\ -0.4764 \\ -0.0730 \\ 0.0767 \\ -0.0266 \\ -0.2890 \\ 0.3391 \\ 0.4284 \end{matrix}$$

8) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_8 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_8 = u_8 - Proj_{W7}\, u_8$$

$$= u_8 - \frac{\langle u_8, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_8, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_8, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 - \frac{\langle u_8, v_4\rangle}{\|v_4\|^2} v_4$$

$$- \frac{\langle u_8, v_5\rangle}{\|v_5\|^2} v_5 - \frac{\langle u_8, v_6\rangle}{\|v_6\|^2} v_6 - \frac{\langle u_8, v_7\rangle}{\|v_7\|^2} v_7$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_8 yaitu :

$$q_8 = \frac{v_8}{\|v_8\|} = \begin{matrix} 0.0163 \\ -0.1760 \\ -0.2723 \\ -0.0557 \\ -0.2174 \\ -0.7161 \\ 0.0120 \\ -0.2837 \\ 0.1293 \\ 0.1987 \\ -0.1802 \\ 0.3770 \\ -0.0493 \\ 0.1325 \end{matrix}$$

9) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_9 dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_9 = u_9 - Proj_{W8}\, u_9$$

$$= u_9 - \frac{\langle u_9, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_9, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_9, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 - \frac{\langle u_9, v_4\rangle}{\|v_4\|^2} v_4$$

$$- \frac{\langle u_9, v_5\rangle}{\|v_5\|^2} v_5 - \frac{\langle u_9, v_6\rangle}{\|v_6\|^2} v_6 - \frac{\langle u_9, v_7\rangle}{\|v_7\|^2} v_7 - \frac{\langle u_9, v_8\rangle}{\|v_8\|^2} v_8$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_9 yaitu :

$$q_9 = \frac{v_9}{\| v_9 \|} = \begin{matrix} 0.0188 \\ -0.2711 \\ 0.2575 \\ -0.2338 \\ 0.0483 \\ 0.2273 \\ 0.1275 \\ 0.0653 \\ 0.6518 \\ -0.3339 \\ -0.2302 \\ 0.2909 \\ -0.1740 \\ 0.1632 \end{matrix}$$

10) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_{10} dengan mengoperasikan bentuk:

$$\begin{aligned} v_{10} &= u_{10} - Proj_{W9}\, u_{10} \\ &= u_{10} - \frac{\langle u_{10}, v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_{10}, v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_{10}, v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3 - \frac{\langle u_{10}, v_4 \rangle}{\| v_4 \|^2} v_4 \\ &\quad - \frac{\langle u_{10}, v_5 \rangle}{\| v_5 \|^2} v_5 - \frac{\langle u_{10}, v_6 \rangle}{\| v_6 \|^2} v_6 - \frac{\langle u_{10}, v_7 \rangle}{\| v_7 \|^2} v_7 - \frac{\langle u_{10}, v_8 \rangle}{\| v_8 \|^2} v_8 \\ &\quad - \frac{\langle u_{10}, v_9 \rangle}{\| v_9 \|^2} v_9 \end{aligned}$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_{10} yaitu :

$$q_{10} = \frac{v_{10}}{\| v_{10} \|} = \begin{matrix} -0.3298 \\ -0.0614 \\ -0.1748 \\ -0.2203 \\ 0.5773 \\ -0.2055 \\ 0.0093 \\ -0.0470 \\ 0.0228 \\ -0.2595 \\ 0.5384 \\ 0.0621 \\ 0.1489 \\ 0.2133 \end{matrix}$$

11) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_{11} dengan mengoperasikan bentuk :

$$\begin{aligned} v_{11} &= u_{11} - Proj_{W10}\, u_{11} \\ &= u_{11} - \frac{\langle u_{11}, v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_{11}, v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_{11}, v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3 - \frac{\langle u_{11}, v_4 \rangle}{\| v_4 \|^2} v_4 \end{aligned}$$

$$- \frac{\langle u_{11}, v_5 \rangle}{\| v_5 \|^2} v_5 - \frac{\langle u_{11}, v_6 \rangle}{\| v_6 \|^2} v_6 - \frac{\langle u_{11}, v_7 \rangle}{\| v_7 \|^2} v_7 - \frac{\langle u_{11}, v_8 \rangle}{\| v_8 \|^2} v_8$$

$$- \frac{\langle u_{11}, v_9 \rangle}{\| v_9 \|^2} v_9 - \frac{\langle u_2, v_{10} \rangle}{\| v_{10} \|^2} v_{10}$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_{11} yaitu :

$$q_{11} = \frac{v_{11}}{\| v_{11} \|} = \begin{matrix} -0.6053 \\ -0.2748 \\ 0.1267 \\ -0.0238 \\ 0.0326 \\ 0.1099 \\ -0.0492 \\ 0.0491 \\ 0.1998 \\ 0.6618 \\ -0.0162 \\ -0.1951 \\ -0.0785 \\ 0.0332 \end{matrix}$$

12) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_{12} dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_{12} = u_2 - Proj_{W1}\, u_2$$

$$= u_{12} - \frac{\langle u_{12}, v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_{12}, v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_{12}, v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3 - \frac{\langle u_{12}, v_4 \rangle}{\| v_4 \|^2} v_4$$

$$- \frac{\langle u_{12}, v_5 \rangle}{\| v_5 \|^2} v_5 - \frac{\langle u_{12}, v_6 \rangle}{\| v_6 \|^2} v_6 - \frac{\langle u_{12}, v_7 \rangle}{\| v_7 \|^2} v_7 - \frac{\langle u_{12}, v_8 \rangle}{\| v_8 \|^2} v_8$$

$$- \frac{\langle u_{12}, v_9 \rangle}{\| v_9 \|^2} v_9 - \frac{\langle u_{12}, v_{10} \rangle}{\| v_{10} \|^2} v_{10} - \frac{\langle u_{12}, v_{11} \rangle}{\| v_{11} \|^2} v_{11}$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_{12} yaitu :

$$q_{12} = \frac{v_{12}}{\| v_{12} \|} = \begin{matrix} -0.0311 \\ -0.0487 \\ 0.1357 \\ -0.2801 \\ -0.2229 \\ -0.1291 \\ 0.4352 \\ -0.1274 \\ 0.1756 \\ -0.0237 \\ 0.2718 \\ -0.0957 \\ 0.2359 \\ -0.6763 \end{matrix}$$

13) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_{12} dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_{13} = u_{13} - Proj_{W12}\, u_{13}$$

$$= u_{13} - \frac{\langle u_{13}, v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_{13}, v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_{13}, v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3 - \frac{\langle u_{13}, v_4 \rangle}{\| v_4 \|^2} v_4$$

$$- \frac{\langle u_{13}, v_5 \rangle}{\| v_5 \|^2} v_5 - \frac{\langle u_{13}, v_6 \rangle}{\| v_6 \|^2} v_6 - \frac{\langle u_{13}, v_7 \rangle}{\| v_7 \|^2} v_7 - \frac{\langle u_{13}, v_8 \rangle}{\| v_8 \|^2} v_8$$

$$- \frac{\langle u_{13}, v_9 \rangle}{\| v_9 \|^2} v_9 - \frac{\langle u_{13}, v_{10} \rangle}{\| v_{10} \|^2} v_{10} - \frac{\langle u_{13}, v_{11} \rangle}{\| v_{11} \|^2} v_{11} - \frac{\langle u_{13}, v_{12} \rangle}{\| v_{12} \|^2} v_{12}$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_{13}yaitu :

$$q_{13} = \frac{v_{13}}{\| v_{13} \|} = \begin{matrix} 0.2147 \\ -0.4695 \\ -0.0569 \\ 0.5217 \\ 0.0371 \\ -0.0753 \\ -0.3275 \\ -0.2030 \\ 0.3200 \\ -0.1436 \\ 0.1707 \\ -0.3494 \\ 0.1086 \\ -0.1289 \end{matrix}$$

14) Berikut akan ditentukan vektor kolom q_{14} dengan mengoperasikan bentuk :

$$v_{14} = u_{14} - Proj_{W13}\, u_{14}$$

$$= u_{13} - \frac{\langle u_{14}, v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{\langle u_{13}, v_2 \rangle}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{\langle u_{14}, v_3 \rangle}{\| v_3 \|^2} v_3 - \frac{\langle u_{14}, v_4 \rangle}{\| v_4 \|^2} v_4$$

$$- \frac{\langle u_{14}, v_5 \rangle}{\| v_5 \|^2} v_5 - \frac{\langle u_{14}, v_6 \rangle}{\| v_6 \|^2} v_6 - \frac{\langle u_{14}, v_7 \rangle}{\| v_7 \|^2} v_7 - \frac{\langle u_{14}, v_8 \rangle}{\| v_8 \|^2} v_8$$

$$- \frac{\langle u_{14}, v_9 \rangle}{\| v_9 \|^2} v_9 - \frac{\langle u_{14}, v_{10} \rangle}{\| v_{10} \|^2} v_{10} - \frac{\langle u_{14}, v_{11} \rangle}{\| v_{11} \|^2} v_{11} - \frac{\langle u_{14}, v_{12} \rangle}{\| v_{12} \|^2} v_{12}$$

$$- \frac{\langle u_{14}, v_{13} \rangle}{\| v_{13} \|^2} v_{13}$$

Sehingga di dapatkan vektor kolom q_{14} yaitu :

$$q_{14} = \frac{v_{14}}{\|v_{14}\|} = \begin{matrix} 0.2295 \\ -0.5314 \\ 0.5083 \\ -0.1662 \\ 0.1525 \\ -0.1753 \\ -0.0708 \\ 0.2372 \\ -0.4266 \\ 0.0753 \\ -0.0613 \\ 0.1222 \\ 0.2386 \\ 0.0190 \end{matrix} .$$

Sehingga dapat dibentuk matriks Q sebagai berikut :

$$Q = \begin{matrix}
0.2408 & 0.4300 & 0.0932 & 0.1723 & -0.0841 & -0.3185 & 0.1865 \\
0.2408 & 0.2295 & -0.1652 & 0.1999 & -0.0159 & 0.3240 & -0.1674 \\
0.3612 & -0.1569 & -0.4394 & 0.2871 & -0.0567 & 0.2670 & -0.1635 \\
0.3612 & -0.3573 & 0.2112 & -0.1335 & -0.1851 & 0.1222 & -0.3810 \\
0.2408 & 0.4300 & -0.1340 & -0.4276 & -0.2377 & -0.0692 & -0.1919 \\
0.1204 & -0.0857 & 0.1703 & -0.2313 & 0.3097 & -0.1871 & 0.3048 \\
0.2408 & -0.2716 & 0.2682 & -0.1565 & -0.6374 & -0.1743 & 0.1206 \\
-0.3612 & 0.1569 & 0.5530 & 0.2976 & -0.1427 & 0.0116 & -0.4764 \\
0.1204 & 0.3152 & 0.1190 & 0.2071 & -0.0268 & 0.1608 & -0.0730 \\
0.3612 & 0.3443 & 0.1499 & 0.0681 & 0.0322 & -0.1840 & 0.0767 \\
0.2408 & -0.1714 & 0.1133 & 0.5036 & 0.2367 & -0.3271 & -0.0266 \\
0.3612 & -0.1569 & 0.2424 & -0.1914 & 0.4964 & -0.0667 & -0.2890 \\
0.1204 & 0.1148 & 0.4287 & -0.1166 & 0.1364 & 0.6752 & 0.3391 \\
0.1204 & -0.1859 & 0.0979 & 0.3596 & -0.2308 & 0.1004 & 0.4284
\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
0.0163 & 0.0188 & -0.3298 & -0.6053 & -0.0311 & 0.2147 & 0.2295 \\
-0.1760 & -0.2711 & -0.0614 & -0.2748 & -0.0487 & -0.4695 & -0.5314 \\
-0.2723 & 0.2575 & -0.1748 & 0.1267 & 0.1357 & -0.0569 & 0.5083 \\
-0.0557 & -0.2338 & -0.2203 & -0.0238 & -0.2801 & 0.5217 & -0.1662 \\
-0.2174 & 0.0483 & 0.5773 & 0.0326 & -0.2229 & 0.0371 & 0.1525 \\
-0.7161 & 0.2273 & -0.2055 & 0.1099 & -0.1291 & -0.0753 & -0.1753 \\
0.0120 & 0.1275 & 0.0093 & -0.0492 & 0.4352 & -0.3275 & -0.0708 \\
-0.2837 & 0.0653 & -0.0470 & 0.0491 & -0.1274 & -0.2030 & 0.2372 \\
0.1293 & 0.6518 & 0.0228 & 0.1998 & 0.1756 & 0.3200 & -0.4266 \\
0.1987 & -0.3339 & -0.2595 & 0.6618 & -0.0237 & -0.1436 & 0.0753 \\
-0.1802 & -0.2302 & 0.5384 & -0.0162 & 0.2718 & 0.1707 & -0.0613 \\
0.3770 & 0.2909 & 0.0621 & -0.1951 & -0.0957 & -0.3494 & 0.1222 \\
-0.0493 & -0.1740 & 0.1489 & -0.0785 & 0.2359 & 0.1086 & 0.2386 \\
0.1325 & 0.1632 & 0.2133 & 0.0332 & -0.6763 & -0.1289 & 0.0190
\end{matrix}$$

Selanjutnya, untuk menentukan matriks segitiga atas *R* dengan menggunakan ketentuan sebagai berikut :

$$R = \begin{matrix} \langle u_1, q_1 \rangle & \langle u_2, q_1 \rangle & \cdots & \langle u_n, q_1 \rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2 \rangle & \cdots & \langle u_n, q_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \langle u_n, q_n \rangle \end{matrix}$$

Sehingga didapatkan matriks *R* yaitu :

$$R = \begin{matrix} 8.3066 & -1.2039 & -0.3612 & -0.2408 & -2.8893 & -3.7320 & -0.7223 \\ 0 & 9.9775 & -6.3578 & 2.1759 & -1.6515 & 2.0553 & -1.8912 \\ 0 & 0 & 8.8005 & -0.9378 & 3.1199 & -1.3954 & 0.7631 \\ 0 & 0 & 0 & 7.0234 & -1.4489 & 3.6052 & 0.8054 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.5559 & 0.4221 & -2.3060 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.6632 & -6.4821 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.1446 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & -2.6485 & -3.1300 & -3.7320 & -2.7689 & 0.2408 & -3.1300 \\ 2.2050 & -0.3196 & -4.2865 & 3.6590 & -2.3386 & 1.9333 & 3.4309 \\ 4.5473 & 4.0920 & -3.2251 & -0.8051 & -1.9167 & -4.5022 & 0.4184 \\ 4.3379 & -5.2830 & 4.9191 & -1.3690 & -0.6230 & -2.1885 & -0.4024 \\ 2.4801 & -1.1383 & 0.2735 & 0.3690 & -0.8980 & -2.2811 & -0.0352 \\ -2.2017 & -0.3902 & 3.4945 & -1.4082 & 3.4481 & -0.0659 & 2.7817 \\ 1.7992 & -5.4686 & 3.4887 & -0.9007 & 1.3287 & -4.2554 & 2.7236 \\ 3.2260 & 2.1132 & 0.1603 & -0.8876 & 0.0010 & 2.4404 & -3.8471 \\ 0 & 3.6619 & -3.5666 & -1.6843 & -2.4417 & 0.5642 & -1.3552 \\ 0 & 0 & 4.2458 & 0.0595 & -1.8738 & -0.3281 & 0.8972 \\ 0 & 0 & 0 & 4.3132 & -2.2173 & 4.0238 & -4.2314 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.8268 & 1.6665 & -6.0652 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.8051 & -1.4722 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7635 \end{matrix}$$

Selanjutnya, didapatkan matriks R^{-1} dengan bantuan software MATLAB 7.0 sebagai berikut :

$$
R^{-1} = \begin{array}{ccccccc}
0.1204 & 0.0145 & 0.0154 & 0.0017 & 0.0432 & 0.0544 & 0.0679 \\
0 & 0.1002 & 0.0724 & -0.0214 & -0.0121 & -0.0030 & 0.0128 \\
0 & 0 & 0.1136 & 0.0152 & -0.0440 & 0.0160 & -0.0119 \\
0 & 0 & 0 & 0.1424 & 0.0273 & -0.0685 & -0.0609 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.1323 & -0.0073 & 0.0317 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1305 & 0.1039 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1228 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
-0.0679 & 0.2334 & 0.2084 & 0.1978 & 0.2674 & -0.1923 & 0.7346 \\
-0.1417 & -0.0062 & 0.1738 & -0.1095 & 0.0704 & 0.2213 & -0.3004 \\
-0.1292 & -0.0603 & 0.0224 & -0.0179 & 0.0006 & 0.2162 & -0.1475 \\
-0.2252 & 0.2457 & 0.1546 & 0.0552 & 0.2476 & -0.0165 & 0.5259 \\
-0.1244 & 0.1594 & 0.1101 & 0.0281 & 0.1304 & 0.0935 & 0.2261 \\
0.0311 & 0.1510 & -0.0670 & 0.1306 & -0.0095 & -0.0637 & 0.0507 \\
-0.0685 & 0.2229 & 0.0889 & 0.0974 & 0.1311 & -0.0045 & 0.2984 \\
0.3100 & -0.1789 & -0.1620 & -0.0038 & -0.1286 & -0.1259 & 0.0413 \\
0 & 0.2731 & 0.2294 & 0.1035 & 0.2276 & -0.2298 & 0.5949 \\
0 & 0 & 0.2355 & -0.0032 & 0.0745 & -0.0089 & 0.0773 \\
0 & 0 & 0 & 0.2318 & 0.0882 & -0.2838 & 0.3974 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.1716 & -0.0752 & 0.3366 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2628 & 0.1400 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3619
\end{array}
$$

Selanjutnya, akan ditentukan matriks Q^t yaitu :

$$Q^T = \begin{matrix} 0.2408 & 0.2408 & 0.3612 & 0.3612 & 0.2408 & 0.1204 & 0.2408 \\ 0.4300 & 0.2295 & -0.1569 & -0.3573 & 0.4300 & -0.0857 & -0.2716 \\ 0.0932 & -0.1652 & -0.4394 & 0.2112 & -0.1340 & 0.1703 & 0.2682 \\ 0.1723 & 0.1999 & 0.2871 & -0.1335 & -0.4276 & -0.2313 & -0.1565 \\ -0.0841 & -0.0159 & -0.0567 & -0.1851 & -0.2377 & 0.3097 & -0.6374 \\ -0.3185 & 0.3240 & 0.2670 & 0.1222 & -0.0692 & -0.1871 & -0.1743 \\ 0.1865 & -0.1674 & -0.1635 & -0.3810 & -0.1919 & 0.3048 & -0.1206 \\ 0.0163 & -0.1760 & -0.2723 & -0.0557 & -0.2174 & -0.7161 & 0.0120 \\ 0.0188 & -0.2711 & 0.2572 & -0.2338 & 0.0483 & 0.2273 & 0.1275 \\ -0.3298 & -0.0614 & -0.1784 & -0.2203 & 0.5773 & -0.2055 & 0.0093 \\ -0.6053 & -0.2748 & 0.1267 & -0.0238 & 0.0326 & 0.1099 & -0.0492 \\ -0.0311 & -0.0847 & 0.1357 & -0.2801 & -0.2229 & -0.1291 & 0.4352 \\ 0.2147 & -0.4695 & -0.0569 & 0.5217 & 0.0371 & -0.0753 & -0.3275 \\ 0.2295 & -0.5314 & 0.5083 & -0.1662 & 0.1525 & -0.1753 & -0.0708 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -0.3612 & 0.1204 & 0.3612 & 0.2408 & 0.3612 & 0.1204 & 0.1204 \\ 0.1569 & 0.3152 & 0.3443 & -0.1714 & -0.1569 & 0.1148 & -0.1859 \\ 0.5530 & 0.1190 & 0.1499 & 0.1133 & 0.2424 & 0.4287 & 0.0979 \\ 0.2976 & 0.2071 & 0.0681 & 0.5036 & -0.1914 & -0.1166 & 0.3596 \\ -0.1427 & -0.0268 & 0.0322 & 0.2367 & 0.4964 & 0.1364 & -0.2308 \\ 0.0116 & 0.1608 & -0.1840 & -0.3271 & -0.0667 & 0.6752 & 0.1004 \\ -0.4764 & -0.0730 & 0.0767 & -0.0266 & -0.2890 & 0.3391 & 0.4284 \\ -0.2837 & 0.1293 & 0.1987 & -0.1802 & 0.3770 & -0.0493 & 0.1325 \\ 0.0653 & 0.6518 & -0.3339 & -0.2302 & 0.2909 & -0.1740 & 0.1632 \\ -0.0470 & 0.0228 & -0.2595 & 0.5384 & 0.0621 & 0.1489 & 0.2133 \\ 0.0491 & 0.1998 & 0.6618 & -0.0162 & -0.1951 & -0.0785 & 0.0332 \\ -0.1274 & 0.1756 & -0.0237 & 0.2718 & -0.0975 & 0.2359 & -0.6763 \\ -0.2030 & 0.3200 & -0.1436 & 0.1707 & -0.3494 & 0.1086 & -0.1289 \\ 0.2372 & -0.4266 & 0.0753 & -0.0613 & 0.1222 & 0.2386 & 0.0190 \end{matrix}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (2.13) maka didapatkan nilai X sebagai berikut :

$$X = R^{-1}Q^T B = \begin{matrix} 0.9746 \\ 0.0780 \\ 0.3887 \\ 0.4054 \\ -0.3383 \\ 0.0244 \\ -0.2481 \\ 0.2352 \\ 0.1088 \\ -0.1877 \\ 0.2509 \\ -0.0791 \\ -0.2514 \\ 0.1678 \end{matrix}$$

Sehingga didapatkan solusi dari sistem persamaan linear kompleks diatas adalah sebagai berikut :

$X_1 = (0.9746 + 0.2352i)$

$X_2 = (0.0780 + 0.1088i)$

$X_3 = (0.3887 - 0.1877i)$

$X_4 = (0.4054 + 0.2509i)$

$X_5 = (-0.3383 - 0.0791i)$

$X_6 = (0.0244 - 0.2514i)$

$X_7 = (-0.2481 + 0.1678i).$

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV, maka diperoleh solusi dari hasil penelitian dengan menggunakan metode dekomposisi *QR* untuk contoh 4.1 sistem persamaan linear kompleks untuk 6 persamaan dan 6 variabel sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
(2+3i)x_1 + (1+i)x_2 + (4+2i)x_3 + (2+2i)x_4 + (3+i)x_5 + (1+2i)x_6 &= (2+3i) \\
(4+2i)x_1 + (2+i)x_2 + (5+2i)x_3 + (1+4i)x_4 + (2+2i)x_5 + (2+2i)x_6 &= (3+2i) \\
(1+2i)x_1 + (2+3i)x_2 + (2+i)x_3 + (3+2i)x_4 + (5+i)x_5 + (2+i)x_6 &= (1+3i) \\
(2+3i)x_1 + (2+i)x_2 + (3+3i)x_3 + (4+i)x_4 + (3+i)x_5 + (1+i)x_6 &= (2+2i) \\
(1+2i)x_1 + (1+4i)x_2 + (2+3i)x_3 + (2+i)x_4 + (3+i)x_5 + (2+3i)x_6 &= (4+2i) \\
(2+i)x_1 + (3+2i)x_2 + (3+i)x_3 + (2+2i)x_4 + (2+2i)x_5 + (2+3i)x_6 &= (3+3i)
\end{aligned}
$$

dan memiliki solusi sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 0.4040 + 0.4240i \\
X_2 &= -0.2775 + 0.4984i \\
X_3 &= -0.3464 - 0.6422i \\
X_4 &= (0.2987 - 0.1660i) \\
X_5 &= -0.0580 + 0.8629i \\
X_6 &= (1.1636 - 1.1425i)
\end{aligned}
$$

Kemudian, untuk contoh 4.2 sistem persamaan linear kompleks untuk 7 persamaan dan 7 variabel adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
(2-3i)x_1 + (4+2i)x_2 - (2-4i)x_3 + (2+2i)x_4 - (2-i)x_5 - (2-2i)x_6 + (3-3i)x_7 &= (4+3i) \\
(2+i)x_1 + (2+3i)x_2 - (3+i)x_3 + (2+2i)x_4 - (2+i)x_5 + (3+2i)x_6 - (4+2i)x_7 &= (3+3i) \\
(3+3i)x_1 - (2-3i)x_2 - (4+2i)x_3 + (2+i)x_4 - (3+i)x_5 + (2-2i)x_6 - (3-i)x_7 &= (2+4i) \\
(3+2i)x_1 - (4+2i)x_2 + (2-4i)x_3 - (2-3i)x_4 - (1-i)x_5 - (2+2i)x_6 - (3-2i)x_7 &= (3+2i) \\
(2+3i)x_1 + (4-2i)x_2 - (4-3i)x_3 - (2+2i)x_4 - (3-4i)x_5 - (2+3i)x_6 - (2+3i)x_7 &= (2+4i) \\
(1+i)x_1 - (1-i)x_2 + (2+3i)x_3 - (2+i)x_4 + (3+2i)x_5 - (3-4i)x_6 + (3-2i)x_7 &= (1+2i) \\
(2+i)x_1 - (3+2i)x_2 + (4+2i)x_3 - (2-2i)x_4 - (4+2i)x_5 - (4-i)x_6 + (4+4i)x_7 &= (2+3i)
\end{aligned}
$$

dan memiliki solusi sebagai berikut :

$X_1 = (0.9746 + 0.2352i)$

$X_2 = (0.0780 + 0.1088i)$

$X_3 = (0.3887 - 0.1877i)$

$X_4 = (0.4054 + 0.2509i)$

$X_5 = (-0.3383 - 0.0791i)$

$X_6 = (0.0244 - 0.2514i)$

$X_7 = (-0.2481 + 0.1678i)$.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini, penulis menggunakan metode dekomposisi *QR* dalam menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks. Bagi peneliti yang ingin melanjutkan penelitian ini, disarankan untuk menggunakan metode lain dalam menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*, Edisi Kedelapan. Erlangga. Jakarta. 2004.

Hasugian, M. Jimmy, dan Agus Prijono. *Menguasai Analisis Kompleks dalam Matematika Teknik*. Rekayasa Sains, Bandung. 2006.

Leon, Steven J. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*, Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta.2001.

Lipschutz, Seymour. Marc Lars Lipson. *Aljabar Linear Schaum's*. Edisi Ketiga. Erlangga, Jakarta. 2006.

Nicholson, W. Keith. *Elementary Linear Algebra*. First Edition. Mc Graw-Hill, Singapore. 2001.

Purbandini. *Sistem Pengenalan Wajah Pada Subruang Orthogonal Dengan Menggunakan Laplacianfaces Terdekomposisi QR*. (ITS) Surabaya. 2006. http://digilib.its.ac.id.

Taher Rahgooy, dkk. *Fuzzy Complex System of Linear Equations Applied to Circuit Analysis*. Vol.1, No.5, December, 2009.

Widodo, Sugeng. *Kajian Dekomposisi Matriks*. (ITS) Surabaya. 2003. http://digilib.its.ac.id.

Yulianti, Dewi. *Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Kompleks menggunakan Metode Dekomposisi SVD"*. UIN-SUSKA Riau. 2012.